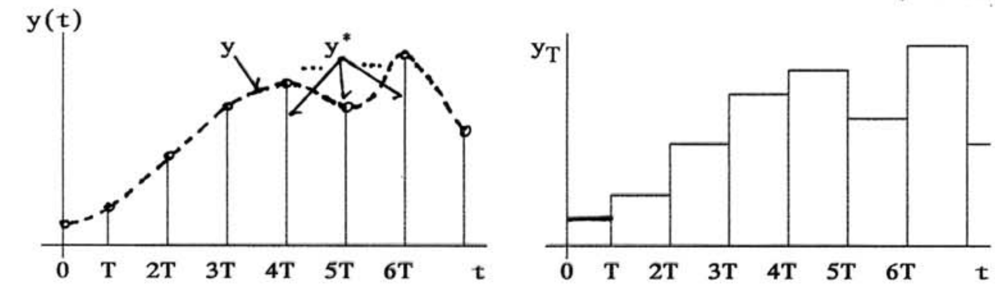
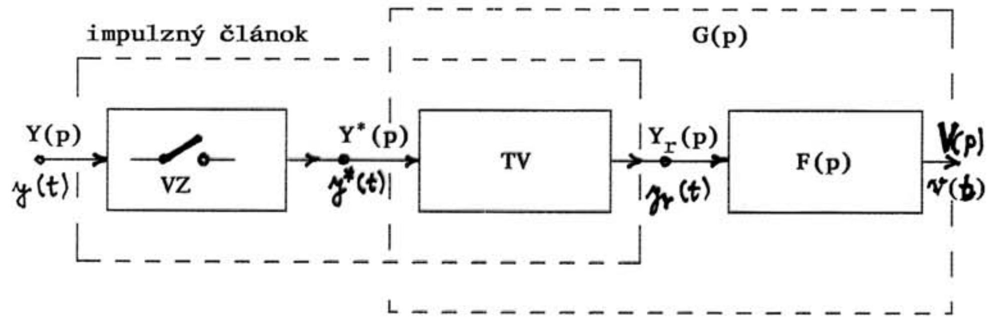
Diskrétny / číslicový?

IMPULZNÉ REGULAČNÉ OBVODY

Nasadenie počítačov pre riadenie predstavuje dnes najdokonalejší spôsob riadenia. Vyžaduje si to však pre zber, prenos ale hlavne uchovanie a spracovanie veľkého množstva dát využívať princípy <u>impulzných systémov</u>. Vtom prípade ale nie je možné využívať teóriu pre spojité systémy.

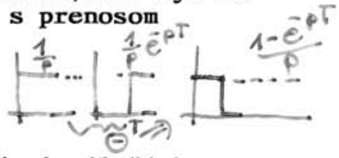
Impulzné systémy pracujú s informáciami prichádzajúcimi v pravidelných časových intervaloch T (vzorkovacích intervaloch). Po určitú dobu δT, ktorá može byť konečná alebo aj nekonečne krátka, sa vzorkovačom VZ odoberá vzorka zo spojitého signálu (napr. aj výstup AČ prevodníka). Tieto vzorky signálu vo forme čísiel je možné rôznym spôsobom spracovať - matematické operácie, alebo sa tiež z neho tvarovačom TV robí po častiach spojitý signál. (Diskretizácia časová, amplitúdová)





<u>Impulzný článok</u> tvorí vzorkovač a tvarovač zapojené za sebou. Prenos tvarovača a prenos sústavy zlučujeme do jediného spojitého prenosu G(p). <u>Tvarovač nultého rádu</u> - prídržný článok, môže byť napríklad integrátor v sérii so spozďovacou linkou s prenosom

$$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$$



a vytvára z každého impulzu približne obdĺžnikový signál šírky T.

Pri analýze lineárnych sústav sa používa Z-transformácia, ktorá je obdobou Laplaceovej transformácie u spojitých systémov.

Z-transformácia vychádza z Laplaceovej transformácie vzorkovaných hodnôt časovej funkcie

$$L\{ y^*(t) \} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\, e^{-pkT}$$

kde je

$y^*(t)$ - impulzná časová funkcia na výstupe vzorkovača (postupnosť impulzov $y(kT)$),
$y(kT)$ - hodnota spojitej funkcie v okamihoch vzorkovania $t = kT$,
k - poradie vzorkovania (nezáporné číslo),
T - interval vzorkovania,
p - komplexná premenná.

Pre jednoduchosť zápisu sa zavádza nová premenná z (odtiaľ názov)

$$z = e^{pT}$$

teda

$$\boxed{Z\{\, y^*(t) \,\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\, z^{-k}}$$

Aby existoval obraz diskrétnej funkcie, je potrebné, aby tento rad konvergoval.

Vlastnosti Z-transformácie ...

<u>Príklad</u>

Určte Z-obraz jednotkového skoku $y(kT) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad k < 0 \\ 1 & \text{pre} \quad k \geq 0 \end{cases}$

Podľa definície je jeho obraz :

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\, z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = 1 + (z^{-1})^1 + (z^{-1})^2 + (z^{-1})^3 + \dots = \boxed{\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}}$$

geom. rad

<u>Príklad</u>

Stanovte diskrétny prenos F G(z) spojitého systému s prenosom

$$F(p) = \frac{1}{p\,(\,p + a\,)}\,, \qquad \text{ak perióda vzorkovania je T.}$$

Použitím inverznej LT dostaneme

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\, \frac{1}{p} - \frac{1}{p + a} \,\right] = (\, 1 - e^{-at} \,)$$

Pre $t = kT$ platí :

$$f(kT) = 1 - e^{-akT} \qquad \text{pre} \quad k \geq 0$$
$$f(kT) = 0 \qquad \text{pre} \quad k < 0$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT})\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-k} - e^{-akT}\, z^{-k})$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} = \boxed{\frac{-z(e^{-aT} - 1)}{(z - 1)(z - e^{-aT})}}$$

pre $|z| \geq 1$

Inverzná Z-transformácia ... (rozklad na parciálne zlomky ...)

Vyjadrenie lineárneho diskrétneho systému v tvare diferenčnej rov.

ako lineárnej kombinácie minulých výstupov, súčasného a minulých vstupov. Pre súčasný výstup systému n-tého rádu platí :

$$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_mu(k-m) - \left(a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n)\right)$$

kde $b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_n$ sú konštanty a m a n sú prirodzené čísla. Počiatočné podmienky sú rovné n odozvám systému pred pôsobením vstupného signálu.

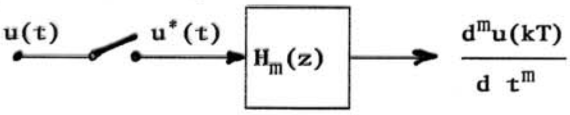
Transformácia LDR na diferenčnú rovnicu

Postup pre transformáciu z oblasti spojitého času t do oblasti diskrétneho času t=kT je nasledovný :

- diferenciály (derivácie) v DR nahradíme diferenciami,
- určíme prenosovú funkciu,
- inverznou Z-transformáciou určíme diferenčné vyjadrenie spojitého systému.

Pre nahradenie diferenciálov v DR sa najčastejšie používa numerický derivátor v Tustingovom tvare s prenosom

$$H_m(z) = \left[\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^m$$



kde m predstavuje rád derivácie.

Podobné vyjadrenie pre $H_m(z)$ dostaneme metódou 1. diferencie:

$$H_m(z) = \left[\frac{1-z^{-1}}{T}\right]^m$$

Príklad

Určte odpovedajúce diferenčné vyjadrenie pre lineárny spojitý systém popísaný LDR a zodpovedajúce riešenie. Uvažujte nulové počiatočné podmienky :

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 3\,u(t) + u'(t)$$

Pre čas vzorkovania t=kT má DR tvar :

$$y''(kT) + 3\,y'(kT) + 2\,y(kT) = 3\,u(kT) + u'(kT)$$

a) použitím Tustingovho derivátora platí :

$$\left[\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^2 Y(z) + 3\left[\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^1 Y(z) + 2\,Y(z) = 3\,U(z) + \left[\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]^1 U(z)$$

Úpravou dostaneme :

$$Y(z)\,[(4+6T+T^2) + (4T^2-8)z^{-1} + (4-6T+2T^2)z^{-2}] = U(z)\,[(3T^2+2T) + 6T^2z^{-1} + (3T^2-2T)z^{-2}]$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}\,U(z) = G(z)\,U(z)$$

Inverznou Z-transformáciou dostaneme riešenie v tvare diferenčnej rovnice :

$$y(k) = \frac{3T^2+2T}{4+6T+T^2}u(k) + \frac{6T^2}{4+6T+T^2}u(k-1) + \frac{3T^2-2T}{4+6T+T^2}u(k-2) - \frac{4T^2-8}{4+6T+T^2}y(k-1) - \frac{3T^2-2T}{4+6T+T^2}y(k-2)$$

b) aplikáciou metódy prvej diferencie dostaneme :

$$\left[\frac{1-z^{-1}}{T}\right]^2 Y(z) + 3\left[\frac{1-z^{-1}}{T}\right]^1 Y(z) + 2\,Y(z) = 3\,U(z) + \left[\frac{1-z^{-1}}{T}\right]^1 U(z)$$

Úpravou dostaneme :

$$Y(z)\ [(1+3T+2T^2) - (2+3T)z^{-1} + z^{-2}] = U(z)\ [(T+3T^2) - Tz^{-1}]$$

$$Y(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}\,U(z) = G(z)\,U(z)$$

Inverznou Z-transformáciou dostaneme riešenie v tvare diferenčnej rovnice :

$$y(k) = \frac{T+3T^2}{1+3T+2T^2}u(k) - \frac{T}{1+3T+2T^2}u(k-1) + \frac{2+3T}{1+3T+2T^2}y(k-1) - \frac{1}{1+3T+2T^2}y(k-2)$$

Pre nenulové počiatočné podmienky ...

Vyjadrenie v tvare konvolútorného súčtu

Vyjadrenie vzťahu medzi vstupom a výstupom v tvare konvolútorného súčtu je :

$$\boxed{y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)\ u(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)\ h(k-i)}$$

kde $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$, ... predstavujú členy váhovej postupnosti. Dôležitou vlastnosťou tohto vyjadrenia je, že aktuálny výstup sa stanovuje výlučne z hodnôt vstupu.

Vyjadrenie v tvare prenosovej funkcie

Vzťah medzi vstupom a výstupom diskrétneho systému je popísaný diferenčnou rovnicou :

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) = b_o u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m)$$

Po násobení oboch strán komplexným číslom z^{-k} a sumáciou dostaneme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [y(k)z^{-k} + a_1 y(k-1)z^{-k} + \ldots + a_n y(k-n)z^{-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} [b_o u(k)z^{-k} + b_1 u(k-1)z^{-k} + \ldots + b_m u(k-m)z^{-k}]$$

Uplatnením vety o oneskorení

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_n z^{-n} Y(z) = b_o U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_m z^{-m} U(z)$$

Pre prenos diskrétneho systému platí :

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}}$$

Pre známu prenosovú funkciu diskrétneho systému stanovíme odozvu nasledovne :

- určíme Z-transformáciu vstupného signálu $U(z)$,
- vypočítame $Y(z) = G(z)\ U(z)$,
- inverznou Z-transformáciou $Y(z)$ vypočítame hľadanú odozvu $y(k)$.

Príklad

Určte prenosovú funkciu systému popísaného diferenčnou rovnicou

$y(k) = u(k) + u(k-1) + 1/6\ y(k-1) + 1/6\ y(k-2)$, Úpravou :

$y(k) - 1/6\ y(k-1) - 1/6\ y(k-2) = u(k) + u(k-1)$, Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} [y(k) z^{-k} - 1/6 y(k-1) z^{-k} - 1/6 y(k-2) z^{-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} [u(k) z^{-k} + u(k-1) z^{-k}]$$

Využitím vety o oneskorení dostaneme :

$$Y(z) - 1/6\ z^{-1} Y(z) - 1/6\ z^{-2} Y(z) = U(z) + z^{-1} U(z)$$

odkiaľ prenos :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1/6\ z^{-1} - 1/6\ z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - 1/6\ z - 1/6}$$

(Stavový priestor..)

Algebra prenosov ...

Stabilita lineárnych diskrétnych systémov

Môžeme ju vyšetriť aj na základe koreňov charakteristickej rovnice

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Pre stabilitu musí platiť : $|p_i| < 1$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$

(cez vlastné čísla...)

Odozvy ...

Syntéza diskrétnych regulátorov

PSD

$$u(k) = K \left[e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k} e(i-1) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right]$$ (obdĺž..!)

$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$, $q_0 = K(1 + T_d/T)$, $q_2 = K T_d/T$

$q_1 = -K(1 + 2 T_d/T - T/T_I)$

prenos pre PSD reg.: $G_R(z) = \dfrac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$ (malé T ...)