Metódy návrhu číslicových regulátorov

V praxi najpoužívanejšie regulátory s optimalizovanými parametrami sú regulátory typu P, PI alebo PID. Ich analógia v číslicovej oblasti sú nasledovné typy: P (proporcionálny), PS (proporcionálno-sumačný) a PSD (proporcionálno-sumačno-diferenčný). Pre lepšie pochopenie vzájomných súvislostí zaoberajme sa hlbšie touto problematikou.

Diskretizácia diferenciálnych rovníc spojitých PID regulátorov a analógia s číslicovými regulátormi

$$U \to \boxed{F_r(p)} \to E$$

$$\Leftarrow F_r(p) = \dots = \frac{E(p)}{U(p)}$$

Idealizovaný tvar PID regulátora je

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right] \qquad /12.1/$$

kde K predstavuje zosilnenie, T_I a T_D integračnú a derivačnú časovú konštantu.

Pre malé periódy vzorkovania T je možné túto rovnicu transformovať do diskrétneho tvaru tak, že deriváciu nahradíme diferenciou prvého rádu a integrál sumou. Spojité integrovanie môžeme nahradiť obdĺžnikovým resp. lichobežníkovým integrovaním. Použitím obdĺžnikového vyjadrenia pre integrovanie bude [13]

$$u(k) = K\left[e(k) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(i-1) + \frac{T_D}{T}(e(k) - e(k-1))\right] \qquad /12.2/$$

$$e(-1) = 0$$

Vyjadrenie /12.2/ predstavuje nerekurzívny riadiaci algoritmus. Výsledkom je konkrétna hodnota akčnej veličiny. Preto sa tento algoritmus nazýva "pozičný algoritmus".

Rekurzívny algoritmus je podstatne vhodnejší pre programovanie na počítači. Tento algoritmus je založený na výpočte aktuálnej hodnoty akčnej veličiny podľa jej predchádzajúcej hodnoty a korekčných členov. Rekurzívny tvar dostaneme odčítaním predchádzajúcej hodnoty akčnej veličiny

$$u(k-1) = K\left[e(k-1) + \frac{T}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(i-1) + \frac{T_D}{T}(e(k-1) - e(k-2))\right]$$

$$(e(-1) = 0)$$

od jej aktuálnej hodnoty reprezentovanej rovnicou /12.2/. Takto dostaneme

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \qquad /12.3/$$

kde

$$\begin{aligned} q_0 &= K(1 + T_D/T) \\ q_1 &= -K\left(1 + 2\frac{T_D}{T} - \frac{T}{T_I}\right) \qquad /12.4/ \\ q_2 &= K\frac{T_D}{T}, \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{\Delta U(k)}{\Delta E(k)} = \frac{q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)}{e(k) - e(k-1)}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} [q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)] z^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} [e(k) - e(k-1)] z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{\Delta U(z)}{\Delta E(z)}$$

+ vzťah o nerekurzív. $\to H(z) = \frac{E(z)}{E(z)} \cdot \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$, $H(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$

Využitím algoritmu /12.3/ sa vypočíta len aktuálna zmena akčnej veličiny. Preto sa /12.3/ nazýva "prírastkový algoritmus".

Použitie lichobežníkovej integrácie pre /12.1/ vedie k tvaru

$$u(k) = K\left[e(k) + \frac{T}{T_I}\left\{\frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i)\right\} + \frac{T_D}{T}(e(k) - e(k-1))\right]$$

Analogickým postupom ako v predchádzajúcom prípade dospejeme k rýchlostnému vyjadreniu

kde
$$
\begin{cases}
q_0 = K\left(1 + \dfrac{T}{2T_I} + \dfrac{T_D}{T}\right) \\
q_1 = -K\left(1 - \dfrac{T}{2T_I} + 2\,\dfrac{T_D}{T}\right) \\
q_2 = K\,\dfrac{T_D}{T}
\end{cases}
\qquad /12.5/
$$

Pre malé periódy vzorkovania T môžeme parametre q_0, q_1 a q_2 vypočítať využitím známych hodnôt K, T_I a T_D podľa vzťahov /12.4/ alebo /12.5/. Na základe uvedeného je zrejmé, že prenos PSD regulátora je

$$
H(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \qquad /12.6/
$$

Definovaním charakteristických koeficientov (pre /12.4/)

$K = q_0 - q_2$ zosilnenie

$C_D = \dfrac{q_2}{K}$ derivačný koeficient

$C_I = \dfrac{q_0 + q_1 + q_2}{K}$ integračný koeficient

dostaneme prenos v tvare

$$
H(z) = \frac{K\left[(1+C_D) + (C_I - 2C_D - 1)z^{-1} + C_D z^{-2}\right]}{1 - z^{-1}} \qquad /12.7/
$$

kde pre malé periódy vzorkovania platí analógia so spojitým PID algoritmom.

$$
K = K, \quad C_D = \frac{T_D}{T}, \quad C_I = \frac{T}{T_I}
$$

pri splnení podmienok

$$
C_D > 0, \; C_I > 0, \; C_I < C_D
$$

Využitím uvedených vzťahov pre PS regulátor platí:

$$
H(z) = \frac{K\left[1 + (C_I - 1)z^{-1}\right]}{1 - z^{-1}}
$$

s diferenčnou rovnicou $u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1)$.

Sumačný regulátor má prenos

$$
H(z) = \frac{q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}
$$
a diferenčnú rovnicu $u(k) = u(k-1) + q_1 e(k-1)$

Pre typ P je $H(z) = q_0$ a $u(k) = q_0 e(k)$.

Proporcionálno diferenčný regulátor má prenos

$$
H(z) = q_0 - q_2 z^{-1} \quad \text{resp.} \quad u(k) = q_0 e(k) - q_2 e(k-1)
$$

$k(1+\frac{T_D}{T})e(k) - k\frac{T_D}{T}e(k-1)$

$u(k) = k\left(e(k) + \frac{T_D}{T}(e(k)-e(k-1))\right) = k\left((1+\frac{T_D}{T})e(k) - \frac{T_D}{T}e(k-1)\right)$

$u(k-1) = k\{(1+\frac{T_D}{T})e(k-1) - \frac{T_D}{T}ke(k-2)\}$, $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = k(1+\frac{T_D}{T})e(k) + \cancel{\dots}\,(k(1+\frac{T_D}{T}) - k\frac{T_D}{T})e(k-1) - \frac{T_D}{T}(e(k-2))$

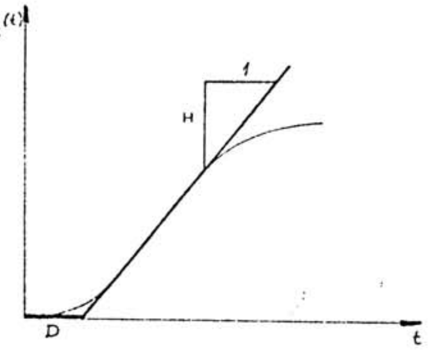
Metóda Ziegler-Nicholsa

Táto metóda udáva jednoduché pravidlá pre nájdenie parametrov číslicových regulátorov typu P, PS a PSD, pričom súčasne zaisťuje stabilitu regulačného pochodu. Pre výpočet je potrebné poznať dva parametre riadeného systému, ktoré sa získajú z prechodovej charakteristiky alebo z medze stability systému riadeného proporcionálnym regulátorom.

Voľba parametrov regulátora vychádza z minimalizácie súčtu kvadrátov odchýliek.

Prechodoví charakteristiku regulovaného systému môžeme aproximovať dvoma spôsobmi [14] :

a) integračným členom s dopravným oneskorením

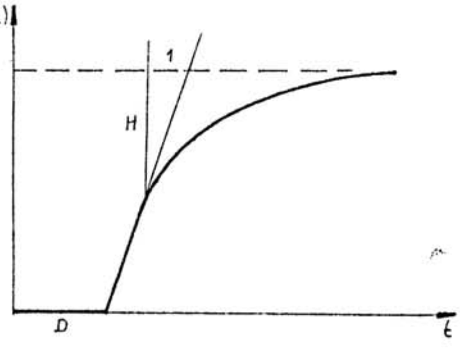


D - dopravné oneskorenie

H - smernica dotyčnice v inflexnom bode

Obr. 12.1 Aproximácia prechodovej charakteristiky

b) systémom prvého rádu s dopravným oneskorením



D - dopravné oneskorenie

H - smernica dotyčnice v počiatočnom bode nábehu

Obr. 12.2 Aproximácia prechodovej charakteristiky

Kritické parametre stanovíme podobne ako v prípade spojitých regulátorov (pozri kap. 7.6).

Pre stanovené veličiny H a D, resp. K_{kr} a T_{kr} a periódu vzorkovania T vypočítame parametre číslicového regulátora podľa nasledovných vzorcov [14] :

a) P regulátor

$$K_p = \frac{1}{H(D+T)} \qquad \text{resp.} \qquad K_p = \frac{1}{2} K_{kr}$$

Prenos regulátora je $H_R(z) = K_p$.

b) PS regulátor

doporučuje sa pre $D/T \geq 0{,}5$

$$K_I = \frac{0{,}27\ T}{H(D + \frac{1}{2}T)^2} \qquad K_I = 0{,}54\ \frac{K_{kr}}{T_{kr}} \cdot T$$

$$K_p = \frac{0{,}9}{H(D + \frac{1}{2}T)} - \frac{1}{2} K_I \qquad K_p = 0{,}45 K_{kr} - \frac{1}{2} K_I$$

za predpokladu, že neplatí $D/T \to 0$, pre $D/T \to 0{,}25$ je potrebné parametre K_I a K_p zmenšiť

$$\text{Prenos regulátora } H_R(z) = \frac{(K_p + K_I) - K_p z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

c) PSD regulátor

$$K_p = \frac{1{,}2}{H(D+T)} - \frac{1}{2} K_I \qquad K_I = \frac{0{,}6T}{H(D + \frac{T}{2})^2}$$

$$K_D = \frac{0{,}5}{HT} \quad \text{resp.} \quad \frac{0{,}6}{HT}$$

za predpokladu, že neplatí $D/T \to 0$

$$K_p = 0{,}6K_{kr} - \frac{1}{2} K_I \text{ , } K_I = 1{,}2\ \frac{K_{kr}}{T_{kr}}\ T, \ K_D = \frac{3}{40}\ K_{kr} T_{kr} \cdot \frac{1}{T}$$

Tieto vzťahy sú vhodné pre $D/T \geq 0{,}5$.

Prenos regulátora je

$$H_R(z) = \frac{(K_p + K_I + K_D) - (K_p + K_D) z^{-1} + K_D z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Stanovenie parametrov regulátora je možné pre iný typ algoritmu podľa 12 v tvare:

$$u(k) - u(k-1) = K \ \ y(k-1) - y(k) + \frac{T}{T_I}\ e(k) + \frac{T_D}{T}\ 2y(k-1) -$$

$$- y(k-2) - y(k)$$

Hodnoty jednotlivých parametrov pre doby prieťahu T_U a nábehu T_n resp. K_{kr} a T_{kr} sú uvedené v tabuľke 6.

Príklad 2.

Pre systém s prenosom

$$F(p) = \frac{1}{(3p+1)(2p+1)} \quad .$$

bola z prechodovej charakteristiky (pozri kap. 5.3) stanovená doba prieťahu $T_U = 3$ s a doba nábehu $T_n = 34{,}5$ s. Vypočítajte metódou Ziegler-Nicholsa parametre PSD regulátora.

Použijeme vyjadrenie podľa uvedenej tabuľky

$$u(k) - u(k-1) = K \quad y(k-1) - y(k) + \frac{T}{T_I} e(k) + \frac{T_D}{T} \quad 2y(k-1) - y(k-2) -$$

$$- y(k)$$

s parametrami $K = \frac{1{,}2 \cdot 34{,}5}{3 + T} - \frac{0{,}3 \cdot 34{,}5 \cdot T}{(3 + 0{,}5\,T)^2}$

$$\frac{T}{T_I} = \frac{0{,}6 \cdot 34{,}5\,T}{K(3 + 0{,}5\,T)^2} \qquad \frac{T_D}{T} = \frac{17{,}25}{KT}$$

Pre pomer $T_U/T = 1 \;\; 0$ je perióda vzorkovania $T = T_U = 3$ s. Dosadením zvolenej periódy vzorkovania do výrazov pre parametre vypočítame ich konkrétne hodnoty : $K = 5{,}36$, $T/T_I = 0{,}57$, $T_D/T = 1{,}07$.

TAB. 6

Typ	K	$\frac{T}{T_I}$	$\frac{T_D}{T}$	K	$\frac{T}{T_I}$	$\frac{T_D}{T}$
P	$\frac{T_n}{T_U + T}$	-----	-----	$\frac{1}{2} K_{kr}$	-----	-----
PS	$\frac{0{,}9\, T_n}{T_U + 0{,}5T} - \frac{0{,}135\, T_n T}{(T_U + 0{,}5T)^2}$	$\frac{0{,}27\, T_n T}{K(T_U + 0{,}5T)^2}$	-----	$\left[0{,}45 \div 0{,}27\, K_{kr}\right] \frac{T}{T_{kr}}$	$0{,}54 \frac{K_{kr}}{K} \frac{T}{T_{kr}}$	-----
PSD	$\frac{1{,}2\, T_n}{T_U + T} - \frac{0{,}3\, T_n T}{(T_U + 0{,}5T)^2}$	$\frac{0{,}6\, T_n T}{K(T_U + 0{,}5T)^2}$	$\frac{0{,}5}{K} \frac{T_n}{T}$	$0{,}6\, K_{kr} \frac{T}{T_p}$	$1{,}2 \frac{K_{kr}}{K} \frac{T}{T_{kr}}$	$\frac{3}{40} \frac{K_{kr}}{K} \frac{T_{kr}}{T}$
	Nepoužiteľné pre $\frac{T_U}{T} \rightarrow 0$			Interval platnosti $T \leq 2T_U$ Nedoporučuje sa pre $T \rightarrow 4T_U$		

Voľba periódy vzorkovania

Voľba periódy vzorkovania predstavuje jeden zo základných problémov, ktoré je treba riešiť pri návrhu každého diskrétneho riadenia. Pri voľbe tejto veličiny je potrebné brať do úvahy viacero požiadaviek, ktoré sú naviac často protichodné. Preto pri stanovení vhodnej hodnoty periódy vzorkovania môžeme využiť nasledovné doporučenia [12]:

- v prípade, že vychádzame výlučne z dobrej zhody medzi analógovým a číslicovým riadením, volíme periódu vzorkovania takú malú, ako je len možné,
- ak poruchy s maximálnou frekvenciou ω_{max} majú byť potlačené podobne ako v spojitej slučke, musíme voliť periódu vzorkovania v súlade so Shanovovym vzorkovacím teorémom.

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{max}}$$

- pre procesy s pomalými zmenami predstavuje vhodnú voľbu minimálne 6-15 vzoriek do dosiahnutia času T_{95} (doba kedy sa dosiahne 95 % hodnoty v ustálenom stave)
- pre procesy v chemickom a tepelno-energetickom priemysle doporučuje [1] nasledovné periódy vzorkovania

riadená veličina	perióda vzorkovania T [s]
prietok	1
tlak	5
výška hladiny	10
teplota	20

- pri znalosti charakteristických veličín riadeného procesu resp. uzavretého regulačného obvodu pre voľbu periódy vzorkovania môžeme využiť údaje z nasledovnej tabuľky [12]:

Kritérium pre voľbu	Stanovenie periódy vzor-	Poznámka
	$T \approx (\frac{1}{8} \dots \frac{1}{16})\frac{1}{f}$ $T \approx (\frac{1}{4} \dots \frac{1}{8})T_t$	pre procesy s výraznou dobou oneskorenia
väčšia doba regulácie ako so spojitým PI regulátorom	$T \approx (1{,}2 \dots 0{,}35)T_U$ $T \approx (0{,}35 \dots 0{,}22)T_U$	$0{,}1 \leq T_U/T \leq 1{,}0$ $1{,}0 \leq T_U/T \leq 10$
kompenzácia poruchy do ω_{max} podobne ako pre spojitú slučku	$T = \frac{\pi}{\omega_{max}}$	ω_{max} je volené pre $\lvert G(\omega_{max})\rvert = 0{,}01 \dots 0{,}1$
	$T \approx (\frac{1}{6} \dots \frac{1}{15})T_{95}$	
identifikácia modelu procesu	$T \approx (\frac{1}{6} \dots \frac{1}{12})T_{95}$	

kde
$|G(\omega_{max})|$ – je modul fr. charakteristiky procesu
f – vlastná frekvencia uzavretej slučky v cykloch/sec
T_t – doba oneskorenia, T_U – doba prieťahu
T_{95} – doba do dosiahnutia 95 % hodnoty v ustálenom stave

Vyjadrenie metódou stavového priestoru

Ak vyjdeme z diferenčnej rovnice, potom

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix} u(k) \qquad /9.5/$$

nazývame stavovými rovnicami a

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \\ x_n(k) \end{bmatrix} + du(k)$$

výstupnou rovnicou stavového vyjadrenia lineárneho diskrétneho systému ($\bar{x}(k)$ predstavuje stavový vektor). Uvedené rovnice vo vektorovom zápise majú tvar:

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}.\bar{x}(k) + \bar{B}.u(k)$$
$$y(k) = \bar{C}.\bar{x}(k) + d.u(k)$$

Pre jednoduchý systém (s jedným vstupom a jedným výstupom) sú $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ a d $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$ a 1×1 rozmerné. Vo všeobecnosti pre m-vstupov a p-výstupov budú $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times m$ rozmerné, pričom vyjadrenie je definované takto:

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{u}(k)$$
$$\bar{y}(k) = \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}\bar{u}(k) \qquad /9.6/$$

Pre stanovenie matíc $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ a koeficienta d bolo vypracovaných niekoľko metód [8] . Tu sa budeme zaoberať dvomi a to Jordanovou (paralelnou) a Frobeniovou (priamou) metódou.

V prípade Jordanovej metódy sa vychádza z prenosovej funkcie diskrétneho systému, kde pre menovateľa vyjadreného v súčinovom tvare a pre m = n platí

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

V prípade, že má polynóm v menovateli n jednoduchých koreňov $p_1, p_2, \dots, p_n$, potom stavové vyjadrenie Jordanovou metódou je

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \\ \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \\ \\ 0 & 0 & 0 & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \\ \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad /9.7/$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \\ \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

kde $c_1 = (z - p_1)F(z) \Big|_{z=p_1}$

Toto vyjadrenie c_1 vyplýva z rozdelenia $F(z)$ na parciálne zlomky

$$F(z) = b_0 + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n}$$

Pozor! V čitateli parciálnych zlomkov nie je z v porovnaní s parciálnymi zlomkami pri inverznej Z-transformácii.

V prípade násobných koreňov sa uvedené vyjadrenie modifikuje. Predpokladajme, že prenosová funkcia má n-tý pól q-násobný. Teda F(z) bude

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_{n-q})(z-p_n)^q} = d + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots$$

$$+ \frac{c_{n-q}}{z - p_{n-q}} + \frac{e_1}{z - p_n} + \frac{e_2}{(z - p_n)^2} + \dots + \frac{e_q}{(z - p_n)^q}$$

Uvedenej prenosovej funkcii odpovedá stavové vyjadrenie v tvare

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \\ x_{n-q}(k+1) \\ x_{n-q+1}(k+1) \\ x_{n-q+2}(k+1) \\ \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & & & & \\ \\ 0 & \dots & p_{n-q} & 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & p_n & 0 & & 0 \\ 0 & & & 1 & p_n & 0 & 0 \\ \\ 0 & & & & 0 & 1 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \\ x_{n-q}(k) \\ x_{n-q+1}(k) \\ x_{n-q+2}(k) \\ \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad /9.8/$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k),$$

kde $c_i = b_i - a_i b_o$ pre $i = 1, 2, \dots, n$

Príklad 5.

Pre systém s prenosovou funkciou

$$F(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

definujte stavové vyjadrenie Jordanovou metódou.

Najprv prenosovú funkciu upravíme na podiel dvoch polynómov násobením z^2 čitateľa aj menovateľa zlomku, tým bude

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2 + z}{(z-1)(z-2)}$$

Vzhľadom na rád (n=2) budú dve stavové veličiny a podľa /9.7/

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$c_1 = (z-1) \left. \frac{z^2 + z}{(z-1)(z-2)} \right|_{z=1} = \frac{1^2 + 1}{1 - 2} = -2$$

$$c_2 = (z-2) \left. \frac{z^2 + z}{(z-1)(z-2)} \right|_{z=2} = \frac{2^2 + 2}{2 - 1} = 6$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že $b_o = 1$ ($b_o + b_1 z^{-1}$ predstavuje polynóm v čitateli prenosovej funkcie). Výstupná rovnica systému má nasledovný tvar:

$$y(k) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + 1.u(k)$$

Príklad 6.

Odvoďte stavové vyjadrenie diskrétneho systému s prenosom

$$F(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)^2}$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že $b_o = 0$.

$$F(z) = b_o + \frac{c_1}{z+1} + \frac{e_1}{z-2} + \frac{e_2}{(z-2)^2} = \frac{c_1}{z+1} + \frac{e_1}{z-2} + \frac{e_2}{(z-2)^2}$$

Teda