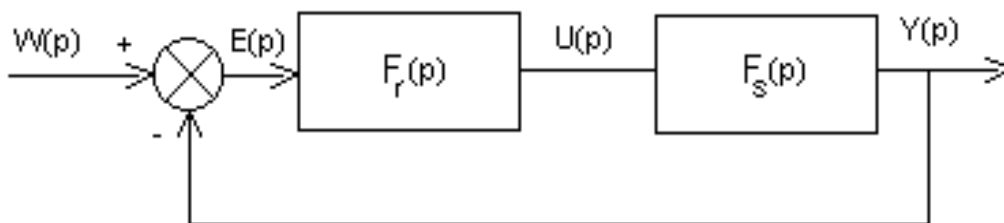


## REGULOVANÉ SÚSTAVY A REGULÁTORY NECELOČÍSELNÉHO RÁDU

Reálne objekty sú vo všeobecnosti sústavami neceločíselného rádu, aj keď u niektorých typov sústav je rád veľmi blízky celočíselnému rádu. Doposiaľ sme dynamické systémy popisovali diferenciálnymi rovnicami celočíselných rádo, bez ohľadu na nepriaznivé dôsledky, ktoré môže spôsobiť zanedbanie reálneho rádu. Robilo sa to z dôvodu neexistencie jednoduchých matematických nástrojov pre ich riešenie. V posledných rokoch sa dosiahli v oblasti neceločíselných derivácií významné pokroky, preto je možné zohľadniť aj reálny rád dynamických systémov. Zavedením kombinácie takzvaných slabých alebo silných integrátorov a derivátorov vznikajú nové modely systémov so zaujímavými dynamickými vlastnosťami. To nám umožní tvorbu adekvátnejších modelov reálnych objektov a tvorbu regulátorov s vyššou kvalitou regulácie a s vyššou robustnosťou.

### Definovanie regulačného obvodu

Budeme uvažovať spätnoväzobný regulačný obvod s jednotkovým ziskom v spätnej väzbe na obr.1, kde  $F_r(p)$  je prenosová funkcia regulátora a  $F_s(p)$  je prenosová funkcia regulovaného systému.



Obr. 1 : Spätnoväzobný regulačný obvod

Ako regulovaný systém uvažujeme reálny systém neceločíselného rádu (fractional order), s prenosovou funkciou

$$F_s^f(p) = \frac{1}{a_2 p^\alpha + a_1 p^\beta + a_0} \quad (1)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  sú vo všeobecnosti reálne ( $\alpha > \beta$ ). Ako regulátor uvažujeme  $PD^\delta$  regulátor neceločíselného rádu s prenosovou funkciou

$$F_r^f(p) = K + T_d p^\delta \quad (2)$$

Pri návrhu neceločíselného  $PD^\delta$  regulátora nám teda pribudol ďalší parameter  $\delta$ . To nám dáva viac možností pri definovaní požiadaviek na uzavretý regulačný obvod, pretože máme viac stupňov voľnosti. Ešte viac stupňov voľnosti poskytuje neceločíselný  $PI^\lambda D^\delta$  regulátor s dvomi nastaviteľnými parametrami navyše, rádom integrovania a rádom derivovania ( $\lambda, \delta$  sú vo všeobecnosti reálne, resp. i celé - klasický PID regulátor).

Výsledný obrazový prenos spätnoväzobného regulačného obvodu s jednotkovým ziskom v spätnej väzbe z obr.1 vzhľadom na žiadanú hodnotu je ( $F_w(p)=Y(p)/W(p)$ )

$$F_w(p) = \frac{F_r^f(p)F_s^f(p)}{1 + F_r^f(p)F_s^f(p)} \quad (3)$$

po dosadení a úprave dostaneme

$$F_w(p) = \frac{K + T_d p^\delta}{a_2 p^\alpha + a_1 p^\beta + T_d p^\delta + (a_0 + K)} \quad (4)$$

Takému obrazovému prenosu zodpovedá v Laplaceovej a časovej oblasti nasledujúca diferenciálna rovnica

$$Y(p)(a_2 p^\alpha + a_1 p^\beta + T_d p^\delta + (a_0 + K)) = W(p)(K + T_d p^\delta) \quad (5)$$

$$a_2 y^{(\alpha)}(t) + a_1 y^{(\beta)}(t) + T_d y^{(\delta)}(t) + (a_0 + K)y(t) = Kw(t) + T_d w^{(\delta)}(t) \quad (6)$$

### Riešenie diferenciálnej rovnice neceločíselného rádu

Pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice neceločíselného rádu použijeme pre aproximáciu derivácií vzťah (7) využívajúci "princíp krátkej pamäte"

$$f^{(\alpha)}(t) \approx {}_{(t-L)}D_t^\alpha f(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N(t)} b_j f(t - jh) \quad (7)$$

kde L je "dĺžka pamäte", h je časový krok,

$$N(t) = \min \left\{ \left[ \frac{t}{h} \right], \left[ \frac{L}{h} \right] \right\} \quad (8)$$

[z] je celá časť z,

$$b_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (9)$$

kde  $\binom{\alpha}{j}$  je binomický koeficient. Pre výpočet  $b_j$  je vhodný nasledujúci rekurentný vzťah

$$b_0 = 1, \quad b_j = \left( 1 - \frac{1 + \alpha}{j} \right) b_{j-1} \quad (10)$$

Po aplikácii vzťahu (7) na diferenciálnu rovnicu (6) dostaneme po úprave nasledujúcu explicitnú rovnicu pre výpočet hodnôt  $y_m$  ( $m=2,3,\dots$ )

$$y_m = \frac{Kw_m + T_d h^{-\delta} \sum_{j=0}^m d_j w_{m-j} - a_2 h^{-\alpha} \sum_{j=1}^m b_j y_{m-j} - a_1 h^{-\beta} \sum_{j=1}^m c_j y_{m-j} - T_d h^{-\delta} \sum_{j=1}^m d_j y_{m-j}}{a_2 h^{-\alpha} b_0 + a_1 h^{-\beta} c_0 + T_d h^{-\delta} d_0 + (a_0 + K)} \quad (11)$$

kde pre prechodovú funkciu je  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = 0$  a  $w_m = 1$ , pre  $m=2,3, \dots$ ,  $b_j, c_j, d_j$  sú počítané z binomických koeficientov,  $h$  je časový krok,  $y_0$  je počiatočná podmienka  $y(0)$  a  $y_1$  sa určí z počiatočnej podmienky  $y'(0)$  nasledovne

$$y_1 = y(0) + y'(0)h \quad (12)$$

Určenie analytického tvaru prechodovej charakteristiky uzavretého regulačného obvodu s neceločíselným regulovaným systémom a neceločíselným regulátorom je oveľa zložitejšie. Využíva sa pri tom Mittag-Lefflerova funkcia. Numerický výpočet podľa takého vzťahu je ale oveľa zložitejší ako to bolo u sústav celočíselného rádu a oveľa zložitejší ako numerický výpočet podľa vzahu (11).

### Návrh parametrov $PD^\delta$ regulátora

Ako neceločíselný regulovaný systém uvažujme reálny systém s prenosom (1) a týmito hodnotami koeficientov

$$a_2 = 0.8, \quad a_1 = 0.5, \quad a_0 = 1, \quad \alpha = 2.2, \quad \beta = 0.9 \quad (13)$$

Pre regulačný obvod podľa obr. 1 s takouto regulovanou sústavou máme za úlohu navrhnuť modifikovanou metódou dominantných koreňov parametre  $PD^\delta$  regulátora.

Pri návrhu neceločíselného  $PD^\delta$  regulátora nám pribudol ďalší parameter a to  $\delta$ . To nám dáva viac možností pri definovaní požiadaviek na uzavretý regulačný obvod, pretože máme viac stupňov voľnosti. Prakticky to znamená, že okrem žiadanej miery stability  $S_t$  a miery tlmenia  $T_t$  môžeme definovať aj maximálnu prípustnú trvalú regulačnú odchýlku  $E_t$ . Úlohu návrhu parametrov regulátora môžeme rozdeliť na dve časti:

#### a) Návrh parametra $K$

Od veľkosti parametra  $K$  závisí veľkosť trvalej regulačnej odchýlky  $E_t$ , doba regulácie  $T_r$  a hodnota prerogulovania  $P_r$ . Vo všeobecnosti platí, že čím je väčšia hodnota proporcionálneho zosilnenia  $K$ , tým je kratšia doba regulácie  $T_r$  a menšia trvalá regulačná odchýlka  $E_t$ .

V našom prípade si definujeme požiadavku na veľkosť trvalej regulačnej odchýlky  $E_t < 2\%$ . Z nasledujúceho vzťahu

$$E_t = \frac{1}{a_0 + K} 100 \quad [\%] \quad (14)$$

vyplýva, že ak má byť splnená požiadavka trvalej regulačnej odchýlky  $E_t < 2\%$ , musí byť hodnota parametra  $K > 100 / E_t - a_0$ , teda  $K > 49$ . Z tejto podmienky určíme veľkosť proporcionálneho zosilnenia  $K=50$ .

## b) Návrh parametrov $T_d$ a $\delta$

Definujeme si žiadanú mieru stability  $S_t = 2,0$  a mieru tlmenia  $T_l = 0,4$ . Pre zadanú mieru stability  $S_t$  a mieru tlmenia  $T_l$  vyhovuje pár komplexne združených koreňov (pólov)

$$p_{1,2} = -2.0 \pm 5.0i \quad (15)$$

Rovnako ako pri klasickej metóde dominantných koreňov aj v tomto prípade pri návrhu parametrov regulátora pracujeme s charakteristickou rovnicou uzavretého regulačného obvodu, ktorá má nasledujúci tvar

$$F_r^f(p) F_s^f(p) + 1 = 0 \quad (16)$$

Po dosadení prenosovej funkcie neceločíselného regulátora (2) a prenosovej funkcie neceločíselného regulovaného obvodu (1) a po úprave dostaneme charakteristickú rovnicu v nasledujúcom tvare

$$a_2 p^\alpha + a_1 p^\beta + T_d p^\delta + (a_0 + K) = 0 \quad (17)$$

Ak za  $p$  dosadíme jeden z dvojice komplexne združených koreňov (15), za  $a_i$  parametre neceločíselného regulovaného obvodu (13) a za  $K$  hodnotu proporcionálneho zosilnenia, ktorú sme vypočítali v predchádzajúcom odstavci, dostaneme nasledujúcu rovnicu

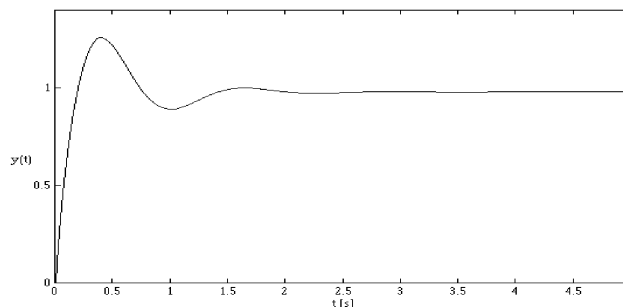
$$0.8(-2 + 5i)^{2.2} + 0.5(-2 + 5i)^{0.9} + (1 + 50) + T_d(-2 + 5i)^\delta = 0 \quad (18)$$

Ide o algebrickú rovnicu, ktorú je potrebné riešiť v oblasti komplexných čísiel. Na umocňovanie komplexného čísla využijeme goniometrický tvar komplexného čísla. Riešením tejto rovnice jednoznačne dostaneme  $T_d$  a  $\delta$ . Výpočet robíme tak, že pasívnym hľadaním vhodného  $\delta$  nájdeme takú hodnotu, pre ktorú je splnená rovnosť rovnice (18). To znamená, že reálna aj imaginárna zložka na ľavej strane rovnice sa musí rovnať 0. Veľkosť parametra  $T_d$  vyplynie z riešenia. Týmto spôsobom sme určili hodnoty parametrov

$$T_d = 5.326, \quad \delta = 1.285 \quad (19)$$

Overenie miery stability  $S_t$  a miery tlmenia  $T_l$  sa dá urobiť pomocou rozšírenej frekvenčnej charakteristiky, ktorú preberieme v nasledujúcej časti. Ďalšou kontrolou je anulovanie rovnice (18) s vypočítanými parametrami  $T_d$  a  $\delta$ .

Po aplikácii nami navrhnutého neceločíselného  $PD^\delta$  regulátora s prenosovou funkciou (2) a vypočítanými parametrami na reálnu neceločíselnú regulovanú sústavu s prenosovou funkciou (1) a parametrami (13) má priebeh prechodovej charakteristiky vypočítaný pomocou rovnice (11) tvar podľa nasledujúceho obr. 2.



## Algoritmy na výpočet miery stability a miery tlmenia regulačných obvodov neceločíselného rádu

Pri syntéze regulátora sa určujú jeho parametre podľa zadaných požiadaviek. Týmito požiadavkami sú napríklad miera stability, miera tlmenia, presnosť regulačného pochodu, dynamické vlastnosti atď. Kontrola splnenia zadaných požiadaviek sa môže robiť napr. simuláciou v časovej oblasti na modeli regulačného obvodu. Existuje veľké množstvo metód pre navrhovanie regulátorov celočíselného rádu, avšak oveľa horšia je situácia v prípade regulátorov neceločíselného rádu, kde sa tieto metódy ešte len rozpracovávajú. Jedna z rozpracovávaných metód je modifikovaná metóda dominantných koreňov, ktorá vychádza zo zadanej miery stability a miery tlmenia regulačného obvodu.

### Frekvenčné charakteristiky

Frekvenčný prenos  $F(i\omega)$  sa rovná obrazovému prenosu  $F(p)$ , do ktorého namiesto premennej "p" dosadíme imaginárnu kruhovú frekvenciu "i $\omega$ ". Grafické znázornenie frekvenčného prenosu pre rôzne hodnoty kruhovej frekvencie " $\omega$ " v rozsahu  $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$  sa nazýva frekvenčná charakteristika.

Praktický význam frekvenčných charakteristík je v určovaní stability regulačných obvodov z priebehu frekvenčnej charakteristiky. Stabilita je asymptotickým kvalitatívnym kritériom akosti regulačného obvodu a je prvoradou a nevyhnutnou podmienkou správnej činnosti každého regulačného obvodu. Posúdenie stability regulačného obvodu neceločíselného rádu je obtiažné urobiť vyšetrovaním jeho charakteristickej rovnice, či už nájdením dominantných koreňov, alebo algebraickými metódami. Uvedené metódy sú vhodné pre celočíselné systémy. V našom prípade používame na vyšetrovanie stability regulačného obvodu rozšírenú frekvenčnú charakteristiku na určenie miery stability  $St$  a miery tlmenia  $Tl$ . Charakteristická rovnica regulačného obvodu má tvar

$$1 + F_o(p) = 0 \quad (20)$$

Pre prenos otvoreného regulačného obvodu s uvažovaním prenosu regulovanej sústavy (1) a prenosu  $PI^\lambda D^\delta$  regulátora

$$F_r^f(p) = K + T_i p^{-\lambda} + T_d p^\delta \quad (21)$$

potom platí

$$F_o(p) = \frac{Kp^\lambda + T_d p^{\delta+\lambda} + T_i}{a_2 p^{\alpha+\lambda} + a_1 p^{\beta+\lambda} + a_0 p^\lambda} \quad (22)$$

Z teórie vyšetrovania stability regulačných obvodov je známe, že systém je stabilný, ak korene charakteristickej rovnice sú záporné, resp. majú zápornú reálnu časť, ak sú komplexne združené. To znamená, že ležia naľavo od imaginárnej osi komplexnej roviny koreňov "p". V prípade frekvenčných metód posudzovania stability transformujeme rovinu koreňov "p" do komplexnej roviny  $F_o$ , pričom transformáciu realizujeme podľa obrazového prenosu otvoreného obvodu. Pri transformácii sa všetky korene charakteristickej rovnice zobrazia z roviny "p" do kritického bodu (-1; i0)

v rovine  $F_o$ . Transformáciu prevedieme tak, že za "p" vo vzťahu (4) dosadíme komplexné číslo  $(r + i\omega)$ . Po dosadení a úprave dostávame nasledujúci vzťah

$$F_o(r+i\omega) = \frac{(AC+BD)+i(BC-AD)}{C^2+D^2} \quad (23)$$

pričom pre koeficienty  $A, B, C, D$  platí

$$\begin{aligned} A &= KM_o^\lambda \cos(\varphi\lambda) + T_d M_o^{\delta+\lambda} \cos(\varphi(\delta+\lambda)) + T_i \\ B &= KM_o^\lambda \sin(\varphi\lambda) + T_d M_o^{\delta+\lambda} \sin(\varphi(\delta+\lambda)) \\ C &= a_2 M_o^{\alpha+\lambda} \cos(\varphi(\alpha+\lambda)) + a_1 M_o^{\beta+\lambda} \cos(\varphi(\beta+\lambda)) + a_0 M_o^\lambda \cos(\varphi\lambda) \\ D &= a_2 M_o^{\alpha+\lambda} \sin(\varphi(\alpha+\lambda)) + a_1 M_o^{\beta+\lambda} \sin(\varphi(\beta+\lambda)) + a_0 M_o^\lambda \sin(\varphi\lambda) \end{aligned} \quad (24)$$

kde  $M_o$  je modul komplexného čísla a  $\varphi$  je fázový posun (fáza), definované vzťahmi

$$M_o = \sqrt{r^2 + \omega^2}, \quad \varphi = \text{artg} \frac{\omega}{r} \quad (25)$$

Zobrazenie roviny "p" do roviny " $F_o$ " je konformné, to znamená, že smery a polohy bodov v rovine "p" sa zachovávajú aj v rovine " $F_o$ ".

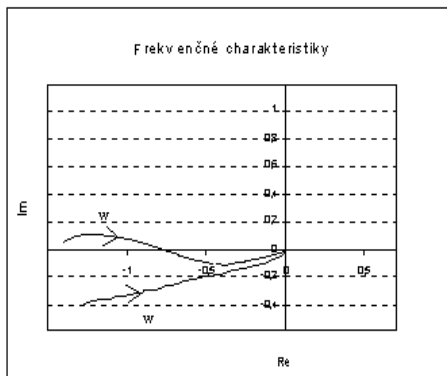
### Využitie frekvenčnej charakteristiky

Na určenie miery stability  $St$  a miery tlmenia  $Tl$  regulačného obvodu zo známych parametrov regulátora neceločíselného rádu a koeficientov sústavy neceločíselného rádu využijeme rozšírenú frekvenčnú charakteristiku popísanú v predchádzajúcich odstavcoch a numerickú metódu delenia intervalu pre nájdenie všetkých takých hodnôt  $r$  a  $\omega$ , pre ktoré platí  $F_o(r + i\omega) = -1 \pm i0$ . Pre hodnoty  $r$  a  $\omega$ , ktoré sú dominantnými koreňmi charakteristickej rovnice (22), potom pre mieru stability a pre mieru tlmenia platí  $St = r$ ,  $Tl = |r/\omega|$ . **Návrh** parametrov regulátora môžeme robiť tak, aby sa dodržala požadovaná miera stability a miera tlmenia, hľadáme  $K$  a  $T_d$ .

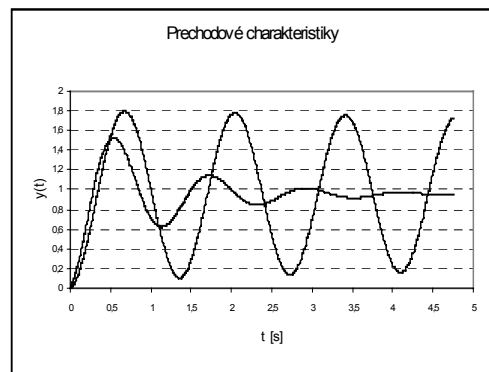
Ak vo vzťahu (23) za  $r$  dosadíme 0, dostávame Nyquistovú frekvenčnú charakteristiku. Potom na zistenie stability regulačného obvodu je potrebné vyšetriť priebeh krivky  $F_o(i\omega)$  pre  $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$  vzhľadom ku kritickému bodu  $(-1; i0)$ . Na základe uvedeného vyplýva, že aj regulačný obvod neceločíselného rádu je stabilný, ak frekvenčná charakteristika prechádza vpravo od kritického bodu, ak po nej postupujeme v smere rastúcich hodnôt  $\omega$ . Ak frekvenčná charakteristika prechádza vľavo od kritického bodu, obvod je nestabilný. Prechod frekvenčnej charakteristiky kritickým bodom znamená, že obvod je na hranici stability.

Overenie uvedených metód urobíme na príklade. Predpokladajme sústavu (1) s koeficientami  $a_2=0.8$ ,  $a_1=0.5$ ,  $a_0=1$ ,  $\alpha=2.2$ ,  $\beta=0.9$ . Po jej aproximácii sústavou celočíselného rádu je  $a_2=0.7414$ ,  $a_1=0.2313$ ,  $a_0=1$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ . Celočíselný PD regulátor navrhnutý metódou dominantných koreňov na aproximovanú sústavu má parametre  $K=20.5$ ,  $T_d=2.7343$ ,  $\delta=1$ . Aplikáciou regulátora na pôvodnú sústavu nedosiahneme požadovanú kvalitu regulačného pochodu ako na aproximovanej celočíselnej sústave. Potvrdili to ako simulácie v časovej oblasti, tak aj kontrola miery stability. Použitím algoritmov využívajúcich rozšírenú frekvenčnú charakteristiku sa potvrdilo, že regulačný obvod celočíselného rádu má zachovanú mieru stability  $St=-2$  a mieru tlmenia  $Tl=0.4$ , kým u pôvodnej sa znížila na  $St=-0.72$  a  $Tl=0.15$ . Extrémou

zmenou parametra regulátora  $T_d=1$  (alebo aj zmenou parametra sústavy neceločíselného rádu) sa regulačný obvod stane nestabilným  $St=+0.05$ , pričom celočíselný regulačný obvod je ešte stále stabilný  $St=-0.83$  (obr. 3, 4). Tým sa dokázala neadekvátnosť aproximácie sústavy neceločíselného rádu sústavou celočíselného rádu pre účely návrhu regulátorov. Je vhodné uvažovať sústavy a aj regulátory neceločíselného rádu, čím je možné zabezpečiť vyššiu kvalitu regulácie a robustnosť. Potom pre neceločíselný  $PD^\delta$  regulátor platí  $K=50$ ,  $T_d=5.326$ ,  $\delta=1.285$  a je zabezpečená požadovaná kvalita regulácie aj na pôvodnej sústave neceločíselného rádu.



Obr. 3 Frekvencné charakteristiky



Obr. 4 Prechodové charakteristiky

## Zhrnutie

Uvedené metódy umožňujú robiť návrh regulátorov neceločíselného rádu so zadanou mierou stability a mierou tlmenia s využitím rozšírenej frekvenčnej charakteristiky. Výsledky ukazujú, že neceločíselné regulátory sú robustnejšie, to znamená, že sú menej citlivé na zmeny parametrov sústavy aj na zmeny parametrov regulátora. Neuvažovanie reálneho rádu sústavy môže viesť až ku kvalitatívne odlišným dynamickým dejom v regulačných obvodoch.

## Modelovanie a simulácia regulačných obvodov v stavovom priestore

Ak sa **parametre systému nemenia v čase**, hovoríme, že systém je **stacionárny**, alebo **t-invariantný**. Ak sa parametre systému **menia v čase**, hovoríme, že systém je **nestacionárny**, alebo **t-variantný**.

Stavový model lineárneho časovo invariantného systému má nasledujúci tvar

$$\bar{x}'(t) = A \bar{x}(t) + B \bar{u}(t)$$

$$\bar{y}(t) = C \bar{x}(t), \quad t \geq 0 \quad (26)$$

- kde **A** – je matica dynamiky systému (n,n),  
**B** – je matica vstupov (riadenia) systému (n,r),  
**C** – je výstupná matica systému (l,n),  
**x** – je vektor stavových premenných (n),  
**y** – je vektor výstupov (n),  
**u** – je vektor vstupov (n).

**Stavová trajektória** je tvorená množinou bodov určených hodnotami stavového vektora  $\mathbf{x}$  v časových okamžikoch v priebehu sledovaného intervalu znázornených v n-rozmernom stavovom priestore. Čas je nezávisle premennou parametrického vyjadrenia krivky stavovej trajektórie. Pomocou stavovej trajektórie je možné hodnotiť chovanie systému v okolí rovnovážneho stavu. **Rovnovážny stav** systému je stav, v ktorom sa už nemenia hodnoty stavových premenných ( $dx/dt=0$ ) pri konštantnej hodnote vstupov.

### Prepis diferenciálnych rovníc regulačných obvodov na stavové rovnice

Voľba stavových premenných nie je jednoznačná a existuje viac postupov pre prepis diferenciálnych rovníc do stavového priestoru.

### Sústavy celočíselného rádu

Ak v uzavretom regulačnom obvode uvažujeme regulovanú sústavu druhého rádu a PD regulátor celočíselného rádu, má výsledná diferenciálna rovnica tvar

$$a_2 y''(t) + (a_1 + T_d) y'(t) + (a_0 + K) y(t) = K w(t) + T_d w'(t) \quad (27)$$

S využitím diferenciálneho operátora ju prepíšeme do nasledujúceho tvaru

$$a_2 D_t^2 y(t) + (a_1 + T_d) D_t^1 y(t) + (a_0 + K) y(t) = K w(t) + T_d D_t^1 w(t) \quad (28)$$

odkiaľ je možné vyjadriť  $y(t)$

$$y(t) = (a_2 D_t^2 + (a_1 + T_d) D_t^1 + a_0 + K)^{-1} (K + T_d D_t^1) w(t) \quad (29)$$

ak zvolíme nasledujúce označenie pre pravú stranu rovnice (29)

$$(a_2 D_t^2 + (a_1 + T_d) D_t^1 + a_0 + K)^{-1} (K + T_d D_t^1) w(t) = (K + T_d D_t^1) x(t) \quad (30)$$

potom z rovnice (30) a (29) dostaneme

$$\begin{aligned} (a_0 + K + (a_1 + T_d) D_t^1 + a_2 D_t^2)^{-1} w(t) &= x(t) \\ y(t) &= (K + T_d D_t^1) x(t) \end{aligned} \quad (31)$$

alebo

$$\begin{aligned} (a_0 + K + (a_1 + T_d) D_t^1 + a_2 D_t^2) x(t) &= w(t) \\ y(t) &= (K + T_d D_t^1) x(t) \end{aligned} \quad (32)$$

alebo po roznásobení

$$\begin{aligned} (a_0 + K) D_t^0 x(t) + (a_1 + T_d) D_t^1 x(t) + a_2 D_t^2 x(t) &= D_t^0 w(t) \\ y(t) &= K D_t^0 x(t) + T_d D_t^1 x(t) \end{aligned} \quad (33)$$



Po zavedení substitúcií

$$\begin{aligned} D_t^0 x(t) &= x_1(t) \\ D_t^1 x(t) &= x_2(t) , \quad x_2(t) = D_t^1 x_1(t) \\ D_t^2 x(t) &= D_t^1 x_2(t) , \quad D_t^1 x_2(t) = D_t^2 x_1(t) \end{aligned} \quad (34)$$

dostaneme z rovníc (33) a (34) stavové rovnice v nasledujúcom tvare (prvá rovnica je z rovnice (34) a ďalšie dve sú z rovnice (33) po substitúcii)

$$\begin{aligned} D_t^1 x_1(t) &= x_2(t) \\ (a_0 + K)x_1(t) + (a_1 + T_d)x_2(t) + a_2 D_t^1 x_2(t) &= w(t) \\ y(t) &= Kx_1(t) + T_d x_2(t) \end{aligned} \quad (35)$$

odkiaľ po úprave dostaneme stavové rovnice uvažovaného regulačného obvodu

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\frac{a_0 + K}{a_2} x_1(t) - \frac{a_1 + T_d}{a_2} x_2(t) + \frac{1}{a_2} w(t) \\ y(t) &= K x_1(t) + T_d x_2(t) \end{aligned} \quad (36)$$

alebo v maticovom tvare

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= A \bar{x}(t) + B \bar{w}(t) \\ \bar{y}(t) &= C \bar{x}(t) , \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0 + K}{a_2} & -\frac{a_1 + T_d}{a_2} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} , \quad C = [K \quad T_d] \quad (38)$$

Stavové rovnice (36) je možné numericky riešiť Eulerovou alebo inou metódou. Pre určenie stavových trajektórií stačí riešiť prvé dve rovnice z (36), tretia definuje výstup regulačného obvodu.

### Sústavy neceločíselného rádu

Doterajšie prístupy vyjadrenia diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu v stavovom priestore vyjadrovali na ľavej strane deriváciu neceločíselného rádu stavového vektora a na pravej strane neboli derivácie stavového vektora

$$\bar{x}^{(\alpha)}(t) = A \bar{x}(t) + B \bar{u}(t)$$

$$\bar{y}(t) = C \bar{x}(t), \quad t \geq 0 \quad (39)$$

To je možné len pre veľmi jednoduché systémy s jednou deriváciou neceločíselného rádu. Taký zápis je možné prepísať aj do maticového tvaru.

Aby sme mohli urobiť prepis aj pre zložitejší systém s dvomi alebo tromi deriváciami neceločíselného rádu, zvolili sme vyjadrenie, kde v stavovom priestore sme vyjadrovali na ľavej strane prvú deriváciu stavového vektora a na pravú stranu sme transformovali derivácie neceločíselného rádu (f) stavového vektora

$$\bar{x}'(t) = f(\bar{x}^{(f)}(t), \bar{u}(t))$$

$$\bar{y}(t) = g(\bar{x}^{(f)}(t), \bar{u}(t)), \quad t \geq 0 \quad (40)$$

Takéto vyjadrenie má klasickú interpretáciu v stavovom priestore aj pre sústavy neceločíselného rádu. Nevýhodou takého prístupu je, že nevieme urobiť vyjadrenie v maticovo vektorovom tvare ako u sústav celočíselného rádu.

Ako už bolo odvodené, ak v uzavretom regulačnom obvode uvažujeme regulovanú sústavu neceločíselného rádu a PD<sup>δ</sup> regulátor neceločíselného rádu, má výsledná diferenciálna rovnica tvar

$$a_2 y^{(\alpha)}(t) + a_1 y^{(\beta)}(t) + T_d y^{(\delta)}(t) + (a_0 + K)y(t) = K w(t) + T_d w^{(\delta)}(t) \quad (41)$$

S využitím diferenciálneho operátora ju prepíšeme do nasledujúceho tvaru

$$a_2 D_t^\alpha y(t) + a_1 D_t^\beta y(t) + T_d D_t^\delta y(t) + (a_0 + K)y(t) = K w(t) + T_d D_t^\delta w(t) \quad (42)$$

odkiaľ je možné vyjadriť y(t)

$$y(t) = (a_2 D_t^\alpha + T_d D_t^\delta + a_1 D_t^\beta + a_0 + K)^{-1} (K + T_d D_t^\delta) w(t) \quad (43)$$

ak zvolíme nasledujúce označenie pre pravú stranu rovnice (43)

$$(a_2 D_t^\alpha + a_1 D_t^\beta + T_d D_t^\delta + a_0 + K)^{-1} (K + T_d D_t^\delta) w(t) = (K + T_d D_t^\delta) x(t) \quad (44)$$

potom z rovnice (44) a (43) dostaneme

$$(a_0 + K + T_d D_t^\delta + a_1 D_t^\beta + a_2 D_t^\alpha)^{-1} w(t) = x(t)$$

$$y(t) = (K + T_d D_t^\delta) x(t) \quad (45)$$

alebo

$$(a_0 + K + T_d D_t^\delta + a_1 D_t^\beta + a_2 D_t^\alpha) x(t) = w(t)$$

$$y(t) = (K + T_d D_t^\delta) x(t) \quad (46)$$

alebo po roznásobení

$$(a_0 + K)D_t^0 x(t) + T_d D_t^\delta x(t) + a_1 D_t^\beta x(t) + a_2 D_t^\alpha x(t) = D_t^0 w(t)$$

$$y(t) = K D_t^0 x(t) + T_d D_t^\delta x(t) \quad (47)$$

Rovnice (47) upravíme tak, aby všetky sčítance mali aj diferenciálny operátor celočíselného rádu

$$(a_0 + K)D_t^0 x(t) + D_t^1 (T_d D_t^{\delta-1} + a_1 D_t^{\beta-1})x(t) + D_t^2 a_2 D_t^{\alpha-2} x(t) = D_t^0 w(t)$$

$$y(t) = K D_t^0 x(t) + D_t^1 T_d D_t^{\delta-1} x(t) \quad (48)$$

Po zavedení substitúcií ako u sústav celočíselného rádu

$$D_t^0 x(t) = x_1(t)$$

$$D_t^1 x(t) = x_2(t) , \quad x_2(t) = D_t^1 x_1(t) \quad (49)$$

$$D_t^2 x(t) = D_t^1 x_2(t) , \quad D_t^1 x_2(t) = D_t^2 x_1(t)$$

dostaneme z rovníc (48) a (49) stavové rovnice v nasledujúcom tvare (prvá rovnica je z rovnice (49) a ďalšie dve sú z rovnice (48) po substitúcii)

$$D_t^1 x_1(t) = x_2(t)$$

$$(a_0 + K)x_1(t) + (T_d D_t^{\delta-1} + a_1 D_t^{\beta-1})x_2(t) + a_2 D_t^{\alpha-2} D_t^1 x_2(t) = w(t) \quad (50)$$

$$y(t) = K x_1(t) + T_d D_t^{\delta-1} x_2(t)$$

odkiaľ po úprave dostaneme stavové rovnice uvažovaného regulačného obvodu

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = -\frac{a_0 + K}{a_2} x_1^{(2-\alpha)}(t) - \frac{T_d}{a_2} x_1^{(1+\delta-\alpha)}(t) - \frac{a_1}{a_2} x_1^{(1+\beta-\alpha)}(t) - \frac{1}{a_2} w_1^{(2-\alpha)}(t) \quad (51)$$

$$y(t) = K x_1(t) + T_d x_2^{(\delta-1)}(t), \quad t \geq 0$$

Pre takéto vyjadrenie nevieme urobiť zápis v maticovo vektorovom tvare ako u sústav celočíselného rádu.

V stavovej teórii je zavedené pravidlo, že rád systému je nanajvyš rovný počtu stavových veličín. U sústav neceločíselného rádu to vždy neplatí, lebo rád sústav je reálny, kým počet stavových premenných môže byť len celočíselný. V týchto prípadoch navrhujeme uvažovať rád systému reálny, zhodný s rádom najvyššej derivácie zodpovedajúcej diferenciálnej rovnice (celočíselný alebo reálny), hoci počet stavových premenných bude len celočíselný.

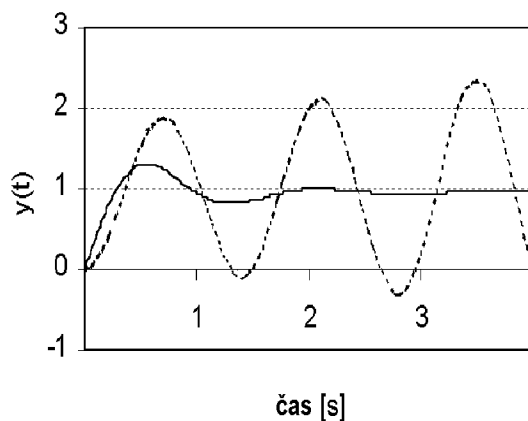
Pre numerické riešenie rovníc (51) je potrebné diskretizovať prvé derivácie na ľavej strane a derivácie neceločíselného rádu na pravej strane (51). Derivácie neceločíselného rádu je možné ľahko aproximovať pomocou už uvedeného vzťahu

$$f^{(\alpha)}(t) \approx {}_{(t-L)}D_t^\alpha f(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N(t)} b_j f(t - jh) \quad (52)$$

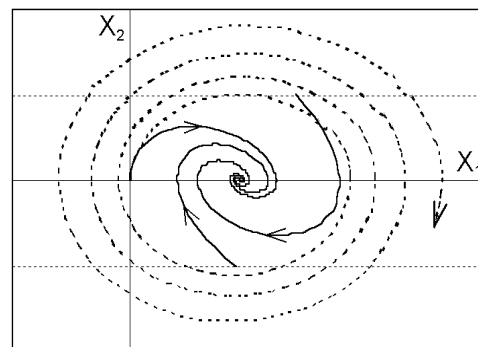
Ak derivácie prvého rádu na ľavej strane (51) budeme aproximovať prvými diferenciálmi, získame prostú Eulerovu metódu numerického riešenia stavového modelu (53). Samozrejme, je možné použiť aj zložitejšie metódy.

$$\begin{aligned}
 x_{1,k+1} &= x_{1,k} + hx_{2,k} \\
 x_{2,k+1} &= x_{2,k} + h \left( -\frac{a_0 + K}{a_2} h^{\alpha-2} \sum_{j=0}^k b_j x_{1,k-j} - \frac{T_d}{a_2} h^{\alpha-\delta-1} \sum_{j=0}^k c_j x_{2,k-j} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a_1}{a_2} h^{\alpha-\beta-1} \sum_{j=0}^k d_j x_{2,k-j} + \frac{1}{a_2} h^{\alpha-2} \sum_{j=0}^k b_j w_{k-j} \right) \quad (53) \\
 y_k &= Kx_{1,k} + T_d h^{1-\delta} \sum_{j=0}^k e_j x_{2,k-j}
 \end{aligned}$$

Verifikáciu metódy môžeme urobiť na už uvedenom regulačnom obvode neceločíselného rádu s parametrami sústavy  $a_2=0.8$ ,  $a_1=0.5$ ,  $a_0=1$ ,  $\alpha=2.2$ ,  $\beta=0.9$  a parametrami regulátora  $K=20.5$ ,  $T_d=3.7343$ , ( $T_d=0.7343$ ),  $\delta=1.15$ . Na obr. 5 sú uvedené dve prechodové charakteristiky regulačného obvodu z klasického numerického riešenia podľa rovnice (11), ktoré sa líšia hodnotou parametra  $T_d$  regulátora. Stabilný obvod má  $T_d=3,7343$ , nestabilný  $T_d=0,7343$ . Na obr. 6 sú zodpovedajúce stavové trajektórie numerického riešenia cez stavový model (53). Pre stabilný obvod stavové trajektórie reprezentujú **stabilné ohnisko** (stable focal point), kým pre nestabilný obvod stavové trajektórie reprezentujú **nestabilné ohnisko** (unstable focal point).



Obr. 5 Prechodové charakteristiky



Obr. 4 Stavové trajektórie

Za podmienky  $x'(t)=0$  môžeme zo stavového modelu získať dve rovnice statiky daného systému, ktoré nie sú algebraické rovnice ako u celočíselných lineárnych systémov ale diferenciálne rovnice, z ktorých je možné vypočítať súradnice rovnovážneho stavu, ku ktorému smerujú stavové trajektórie.