Metóda stavového priestoru

Podstata metódy stavového priestoru

Metóda stavového priestoru vychádza z geometrickej kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc , založených na prácach francúzskeho matematika H.Poincaré . Táto metóda je použiteľná pre sústavy opísané sústavou kanonických diferenčných rovníc (2) v kapitole Matematický opis nelineárnych sústav v ktorých funkcia g_i sú spojité a majú spojité derivácie . Po vhodnej modifikácii je táto metóda použiteľná aj pre sústavy , obsahujúce typické nelinearity .

Metódu stavového priestoru možno použiť všeobecne pre sústavu n kanonických rovníc , z ktorých každá odpovedá jednej súradnici stavového priestoru . Vzhľadom k tomu , že sa metóda opiera o geometrický názor , je jej použitie pre rovnice prvého rádu jednoduché . Hlavnou oblasťou jej aplikácie sú sústavy druhého rádu , je použiteľná pre sústavy tretieho rádu vyžaduje už ale priestorové geometrické konštrukcie , ale jej praktické použitie pre sústavy vyšších rádov naráža na značné ťažkosti .

Ak je zadaná sústava kanonických diferenciálnych rovníc

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n, u, t), i = 1,2,...., n ....(1)$$

a ak všetky spĺňajú Lipschitzovu podmienku a podmienku spojitosti v okolí bodu

$$[x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0), u(t_0), t_0]$$

potom v okolí tohto bodu existuje jediné riešenie

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$$

sústavy rovníc (1) . Toto riešenie určuje v n-rozmernom stavovom priestore jednoznačnú fázovú trajektóriu , prechádzajúcu bodom

$$[x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0), u(t_0), t_0]$$

Pre každý konkrétny čas t sa dostáva v tomto priestore zobrazovací bod . Súhrn všetkých trajektórií vytvára fázový portrét riešenia sústavy . (U chaotických systémov neexistuje fázový portrét ako jedna krivka , ale ako plocha tvorená nekonečným počtom kriviek , pričom sa žiadna neopakuje.)

Fázová trajektória podáva úplný obraz o jednom konkrétnom riešení sústavy so zadanými počiatočnými podmienkami a so zadanou vstupnou funkciou u(t) . Fázový portrét riešenia vyšetrovanej sústavy pre zadanú vstupnú funkciu u(t) .

V ďalšom sa budeme zaoberať prevažne autonómnymi sústavami , pre ktoré v rovniciach (1) medzi argumentami funkcií g_i nevystupuje ani u(t) , ani explicitne vyjadrený čas t . (vstupná veličina je rovná nule , ale nemusí byť , budenie sústavy sa robí voľbou počiatočných podmienok)

Fázové portréty sústav 1. rádu

Predpokladajme diferenciálnu rovnicu opisujúcu sústavu prvého rádu v tvare

$$\frac{dv}{dt} + H(v) = u_0 ....(1)$$

kde u_0 je konštanta .

Je možné rovnicu (1) upraviť do kanonického substitučného tvaru pričom rovnica má tvar

$$v_1 = x_1 \qquad (2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (3)$$

$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{u}_0 - H(x_1) \qquad (4)$$

Rovnica (4) nie je diferenciálna v dôsledku čoho fázový portrét je tvorený jedinou trajektóriou , ktorú opisuje práve táto rovnica .

Z rovnice (3) možno odvodiť všeobecné vlastnosti fázového portrétu sústav prvého aj druhého rádu :

1) Rovnovážnemu stavu môže odpovedať iba bod na ose x_1 , nakoľko rýchlosť zmeny x_1 (určená súradnicou x_2) je tam nulová .
2) Pohyb po fázovej trajektórii v hornej polrovine ($x_2 > 0$) prebieha vždy zľava do prava ($dx_1 > 0$) nakoľko $dt > 0$. V dolnej polrovine je pohyb vždy sprava doľava .
3) Čas potrebný k prechodu z bodu M do bodu N je

$$\mathrm{t} = \mathrm{t}_\mathrm{N} - \mathrm{t}_\mathrm{M} = \int_M^N \frac{dx_1}{x_2} \qquad (5)$$

4) Ak body M a N ležia blízko seba , je možné nahradiť trajektóriu úsekom priamky

$$x_2 - x_{2N} = k(x_1 - x_{1N}) \qquad (6)$$

a podľa (5) platí

$$\Delta\mathrm{t} = \mathrm{t}_\mathrm{N} - \mathrm{t}_\mathrm{M} = \int_M^N \frac{dx_1}{x_2} = \frac{1}{\mathrm{k}}\int_M^N \frac{dx_2}{x_2} = \frac{1}{\mathrm{k}} \ln \frac{x_{2N}}{x_{2M}} \qquad (7)$$

Ak bod N leží na ose x_1 a pre smernicu aproximačnej priamky platí

$$-\infty < k < 0 \qquad (8)$$

potom je Δt nekonečné . Iba pre $k = -\infty$ (trajektória má v bode N dotyčnicu kolmú na os x_1) môže byť Δt konečné .

Príklad

Nech v rovnici (1) má nelineárna funkcia tvar

$$\mathrm{H(v)} = \mathrm{v}^2 \qquad (9)$$

Úlohou je vyšetriť fázový portrét pre $u_0 = 1$. Rovnica trajektórie je podľa (4)

$$\mathrm{x}_2 = 1 - x_1^2$$

a jej priebeh je na hornom obr. Bod (1,0) predstavuje stabilný rovnovážny stav , do ktorého sa sústava dostane pri voľbe počiatočnej podmienky

$$x_{10} > -1$$

za nekonečne dlhý čas . Bod (-1,0) reprezentuje nestabilný rovnovážny stav .

Fázové portréty sústav druhého rádu

Názornosť geometrických konštrukcií vo fázovej rovine predurčuje metódu stavového priestoru k použitiu pre sústavy druhého rádu . Obvykle sa vyšetrujú autonómne sústavy (vstupná veličina je identicky nulová , budenie sústavy sa deje voľbou počiatočných podmienok) . V tomto prípade majú rovnice tvar

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \qquad (2)$$

pričom x_1 je rovný výstupu sústavy . Diferenciálna rovnica fázových trajektórií sa získa predelením rovníc (2) a (1)

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} \qquad (3)$$

Pre fázový portrét sústav 2.rádu platia všetky štyri vlastnosti , uvedené v predchádzajúcej kapitole .

Metóda normál

Je vhodná pre konštrukciu jednotlivej trajektórie . Z rovnice (3 – smernica dotyčnice D) sa určí smernica normály v bode (x_{10} , x_{20})

$$k_N = -\frac{dx_1}{dx_2}\Big|_{x_{10}, x_{20}} = \frac{x_{20}}{-f(x_{10}, x_{20})} \qquad (4)$$

Podľa toho je bod A na ose x_1 bodom normály (nasl. obr.) . Smer vynášania hodnoty f(x_{10} , x_{20}) podľa jej znamienka je vyznačená na obr.

Metóda izoklín

Je vhodná pre konštrukciu celého fázového portrétu . Ak sa zvolí konkrétna hodnota k smernice dotyčnice k trajektórii , potom vzťah (3)

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} \qquad (3)$$

udáva rovnicu krivky zvanej izoklína . Na nej majú všetky dotyčnice k trajetórii rovnakú smernicu , danú zvolenou hodnotou k . Zostrojením dostatočného počtu izoklín pre rôzne hodnoty k sa získa vo fázovej rovine sieť dotyčníc , umožňujúca zakresliť celý fázový portrét . Nech je napr. sústava opísaná rovnicou

$$v'' - vv' - (v')^2 = 0 \qquad (5)$$

a príslušný substitučný kanonický tvar je

$$x_1 = v; \ \frac{dx_1}{dt} = x_2; \ \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 + x_2^2 \qquad (6)$$

Rovnica izoklín je potom (zo vzťahu (6) podľa (3)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 x_2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_2} \qquad \Rightarrow \qquad k = x_1 + x_2 \qquad (7)$$

Izokliny sú pre rôzne hodnoty k zakreslené bodkočiarkovane obr.1 , plnou čiarou sú vykreslené trajektórie . Pre voľbu počiatočných podmienok v šrafovanej oblasti obr.2 je chovanie sústavy stabilné .

Smer šípok na trajektóriách (aj ich dotyčnice na izoklínach) sa určuje podľa vlastnosti 2 . Trajektórie ani nie sú potrebné , stačí izokliny , na nich dotyčnice so šípkami . Ku fázovému portrétu smerujú trajektórie z oboch strán .

V prípade , že izokliny nie sú priamky , použitie tejto metódy je pracnejšie . Pre Van Der Polovu rovnicu je rovnica izoklín

a príslušný fázový portrét je na obr. 3.18 .

$$x_2 = \frac{x_1}{1 - k - x_1^2} \qquad (8)$$

Časy prechodu po fázových trajektóriách

Priamy výpočet času prechodu podľa vzťahu (5) kapitoly Fázové portréty sústav 1.rádu

$$t = t_N - t_M = \int_M^N \frac{dx_1}{x_2} \qquad (5)$$

je obvykle nemožný (ak nepoznáme rovnicu trajektórie v tvare $x_2 = G(x_1)$) alebo veľmi obťažný .

Ak je možné úsek trajektórie aproximovať priamkou , potom doba prechodu po tomto úseku sa určí podľa vzťahov

$$x_2 - x_{2N} = k(x_1 - x_{1N})$$

$$\Delta t = t_N - t_M = \int_M^N \frac{dx_1}{x_2} = \frac{1}{k}\int_M^N \frac{dx_2}{x_2} = \frac{1}{k}\ln\frac{x_{2N}}{x_{2M}}$$

Pre vodorovné priamkové úseky je k= 0 a príslušná doba prechodu je

$$\Delta t = \int_M^N \frac{dx_1}{b} = \frac{1}{b}(x_{1N} - x_{1M}) \text{....................}(9)$$

kde b je vzdialenosť trajektórie od osi x_1 .

Často sa úsek trajektórie dá nahradiť časťou kružnice so stredom na ose x_1 . Rovnica kružnice je

$$(x_1 - q)^2 + x_2^2 = R^2 \qquad (10)$$

a po zohľadnení transformačných vzťahov

$$\begin{aligned} x_2 &= R\sin\varphi \\ x_1 - q &= R\cos\varphi \qquad (11) \\ dx_1 &= -R\sin\varphi d\varphi \end{aligned}$$

je hľadaná doba prechodu

$$\Delta t = \int_M^N \frac{dx_1}{x_2} = -\int_{\varphi M}^{\varphi N} d\varphi = \varphi_M - \varphi_N \qquad (12)$$

V prípade aproximácie viacerými úsekmi kružníc sa doba prechodu získa ako súčet príslušných stredových uhlov nasl.obr.

$$\Delta t = t_N - t_M = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (13)$$

Singulárne body riešenia diferenciálnej rovnice

V kanonickej sústave diferenciálnych rovníc

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1,...,x_n) \qquad (1)$$

môže pri vyšetrovaní fázovej trajektórie v priemetni (x_h , x_j) ,

$$\frac{dx_j}{dx_h} = \frac{g_j(x_1, x_2,...,x_n)}{g_h(x_j, x_2,...,x_n)} \qquad (2)$$

nastať prípad , že v niektorom bode fázového priestoru obe funkcie g_j a g_h limitujú súčasne k nule . Hodnota smernice fázovej trajektórie je v tomto bode neurčitá a príslušný bod sa nazýva singulárny bod riešenia diferenčnej rovnice . V dôsledku uvedenej skutočnosti neplatí tvrdenie , že singulárnym bodom prechádza jediná trajektória .

Pre kanonickú sústavu diferenciálnych rovníc v substitučnom tvare pre nelineárnu autonómnu sústavu druhého rádu

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \qquad (4)$$

sa určia singulárne body z podmienky

$$x_2 = 0 \ ; \ f(x_1, x_2) = 0 \qquad (5)$$

Singulárne body musia ležať na ose x_1, o ich počte a polohe na ose x_1 rozhoduje charakter nelineárnej funkcie f . Pre nelineárnu sústavu , opísanú rovnicami (3) a (4) možno nájsť charakteristickú rovnicu lineárnej aproximácie podľa vzťahu (3) z kapitoly 3.3.3

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial fx_1}\Big|\sin g & \left(\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial fx_2}\Big|\sin g \ \ \text{- p}\right) \end{vmatrix} = p^2 - p\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial fx_2}\Big|\sin g \ \ \text{-}\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial fx_1}\Big|\sin g \ = 0 \ (6)$$

kde

$$\partial \mathrm{f}(x_1, x_2) / \partial fx_i \ {}_{\text{sing}}$$

je hodnota príslušnej parciálnej derivácie v singulárnom bode , teda každému singulárnemu bodu prislúcha vo všeobecnosti iná charakteristická rovnica .

Ak ani jeden z koreňov nemá nulovú reálnu časť , potom podľa prvého Ljapunovoho kritéria možno posúdiť stabilitu príslušného rovnovážneho stavu dokonca aj charakter singulárneho bodu . Pritom fázový portrét nelineárnej sústavy má tvar zhodný s portrétom príslušnej lineárnej náhrady iba v malom okolí singulárneho bodu .

Vo väčšej vzdialenosti môže dôjsť k rôznym deformáciám , aj keď typický charakter fázového portrétu ostáva zachovaný . Tak napr. trajektórie vzďaľujúce sa od sedlového bodu sa síce primykajú k asymptotám , ale tieto sú zväčša krivočiare a nie priamkové . Podobne trajektórie okolo stredu sú síce uzavreté , ale nemusia byť stredovo , ani osovo súmerné . V prípade , že sa v charakteristickej rovnici vyskytuje koreň s nulovou reálnou časťou , môže byť typ singularity lineárnej náhrady iný ako u pôvodnej sústavy .

V prípade Van de Polovej rovnice je substitučný kanonický tvar

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 ; \frac{dx_2}{dt} = (1 - x_1^2)x_2 - x_1 \qquad (7)$$

a príslušná charakteristická rovnica je podľa (6)

$$\mathrm{p}^2 - (1 - x_1^2)_{\sin g}\, p - (2x_1 x_2 - 1)_{\sin g} = 0 \qquad (8)$$

Jediným singulárnym bodom Van der Polovej rovnice je podľa (5) bod $x_1 = x_2 = 0$ a rovnica (8) nadobúda preň tvar

$$\mathrm{p}^2 - p + 1 = 0 \qquad (9)$$

Korene rovnice sú 0,5 ± 0,86i , teda počiatok fázovej roviny je nestabilným ohniskom (obr.dole) .

Typy fázových trajektórií

Podľa chovania trajektórie na jej začiatku teda pre

$$\lim_{t \to -\infty} x_1(t); \lim_{t \to -\infty} x_2(t) \qquad (1)$$

a v blízkosti konca , t.j. pre

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t); \lim_{t\to\infty} x_2(t) \qquad (2)$$

môžu nastať rôzne prípady

1) Bod trajektórie je pre medzné hodnoty času regulárny (nesingulárny) t.j. sú splnené podmienky jednoznačnosti riešenia . Trajektórie tohto typu „prichádzajú z nekonečna“ ak je bod typu (1) regulárny a „pokračujú do nekonečna“ ak je regulárny bod (2) , lebo v dôsledku existencie – jednoznačnosti riešenia má takáto trajektória v každom bode svoje pokračovanie v smere kladných aj záporných prírastkov času .

2) Bod trajektórie je pre jednu medznú hodnotu času (alebo pre obidve) singulárnym bodom , v ktorom neplatí jednoznačnosť riešenia . V tomto prípade zo singulárneho bodu vychádza alebo v ňom končí viacero trajektórií (v nestabilnom uzle , či ohnisku končí nekonečne veľa trajektórií, v sedlovom bode končia aj začínajú dve trajektórie – obr. dole) .

3) Trajektória vytvára uzavretú čiaru , neobsahujúcu singulárne body . Prislúcha jej periodické riešenie vyšetrovanej diferenciálnej rovnice . Sú možné rôzne alternatívy .

a) Všetky trajektórie v okolí vyšetrovanej uzavretej trajektórie sú tiež uzavreté krivky . (obr.a)

b) Všetky trajektórie v okolí uvažovanej uzavretej trajektórie krivky sa k nej čoraz viac blížia – stabilný medzný cyklus (obr. b) .

c) Všetky trajektórie v okolí uvažovanej uzavretej trajektórie krivky sa od nej vzďaľujú – nestabilný medzný cyklus (obr. c) .

d) Z vnútornej strany vyšetrovanej trajektórie majú susedné trajektórie charakter podľa jedného z bodov 3 a.-c. a z vonkajšej strany podľa niektorého iného z týchto bodov . Kombinácií je viacero , v praxi najčastejším je tzv. polostabilný medzný cyklu (obr. d – zvnútra stabilný , zvonka nestabilný) .