Všeobecná teória stability

Definícia stability podľa Ljapunova

V teórii nelineárnych sústav sa dnes takmer vždy používa definícia stabilty podľa Ljapunova . Existuje zásadný rozdiel medzi stabilitou lineárnej sústavy a medzi stabilitou podľa Ljapunova , ktorá sa týka iba istého pochodu prebiehajúceho v sústave pohybu sústavy a nie celej sústavy .

Pohyb sústavy sa prejavuje časovou zmenou hodnôt stavových veličín

$$x_1(t), x_2(t);...;x_n(t)....................(1)$$

ktoré možno považovať za prvky stavového vektora x(t) . Jeho zložky sú vo všeobecnosti závislé nielen od času t , ale od istého súboru parametrov , vytvárajúcich vektor parametrov m . Z formulácie úlohy musí vyplynúť , ktoré parametre sa považujú za zložky tohoto vektora . Často sú to počiatočné podmienky pohybu

$$\overline{m} = \overline{x}(0)....................(2)$$

Nenebudený pohyb sústavy (nulové riešenie) je opísaným vzťahom

$$\overline{x}_0(t) = \overline{F}_0(\overline{m}_0, t)................(3)$$

Ak sa zmení vektor parametrov

$$\overline{m}_q = \overline{m}_0 + \overline{q}....................(4)$$

kde q je vektor poruchy , potom sa zmení aj pohyb sústavy

$$\overline{x}_q(t) = \overline{F}_q(\overline{m}_q, t)................(5)$$

Tento nabudený pohyb sústavy sa líši od nenabudeného pohybu o vektor odchýlky

$$\overline{y}_q(t) = \overline{x}_q(t) - \overline{x}_0(t)................(6)$$

Základné definície

A. Ak pre

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

také , že pre

$$\forall q : N(\overline{q}) \le \delta$$

platí

$$N(\overline{y}_q(t)) < \varepsilon$$

pre

$$\forall t > t_0$$

potom pohyb sústavy je stabilný v zmysle Ljapunova .

B. Pohyb sústavy , ktorý je stabilný v zmysle Ljapunova a pre ktorý naviac platí

$$\lim_{t \to \infty} N(y_q(t) = 0$$

je asymptoticky stabilný v zmysle Ljapunova .

C. Pohyb sústavy je nestabilný v zmysle Ljapunova , ak ∃ aspoň jedno ε > 0 také . že pre

$$\forall \delta > 0 \exists$$

aspoň jedno

$$\overline{q} : N(\overline{q}) \le \delta$$

a platí

$$N(\overline{y}_q(t)) > \varepsilon$$

pre aspoň jedno

$$t > t_0$$

Geometrický zmysel stability podľa Ljapunova

Ak sa v definíciách v predchádzajúcom odseku chápe norma vektora ako euklidovská , t.j.

$$N(\overline{x}) = N_E(\overline{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{..................(1)}$$

potom koncový bod vektora q musí ležať vo vnútri alebo na povrchu n-rozmernej gule so stredom v počiatku a s polomerom δ , kdežto koncový bod vektora x_q leží vo vnútri n-rozmernej gule o polomere ε a so stredom v bode x_0 . Ak sústava je opísaná rovnicami

$$\frac{dx_{q,i}}{dt} = f_i[x_{q1}(t), x_{q2}(t), ..., x_{qn}(t)], i = 1,2,...,n \text{...............(2)}$$

a ak uvažujeme častý prípad poruchového vektora q predstavujúceho počiatočné podmienky , t.j. pre

$$q_i = x_{q,i}(0) - x_{0,i}(0); i = 1,2,...,n \text{..............(3)}$$

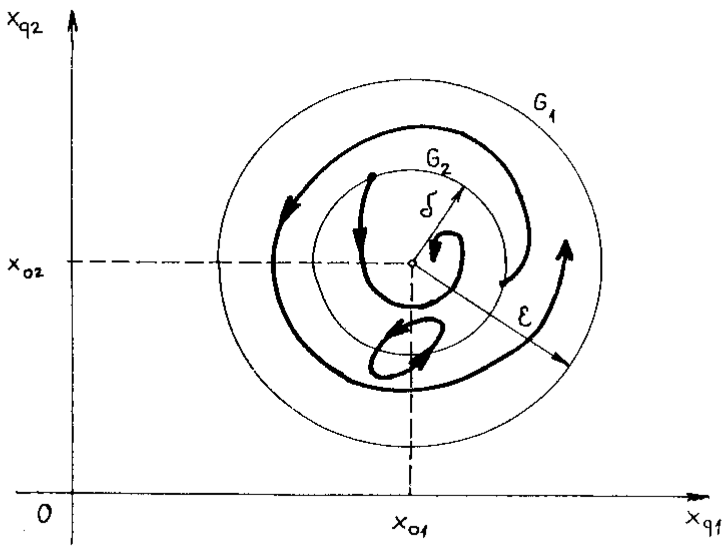
V tomto prípade sa priestor poruchových vektorov stotožní so stavovým priestorom a vzájomné priradenie porúch a fázovej trajektórie , reprezentujúcej príslušný nabudený pohyb sa prejaví tým , že táto trajektória začína v bode

$$\overline{x}_q(0) = \overline{x}_0(0) + \overline{q} \text{..................(4)}$$

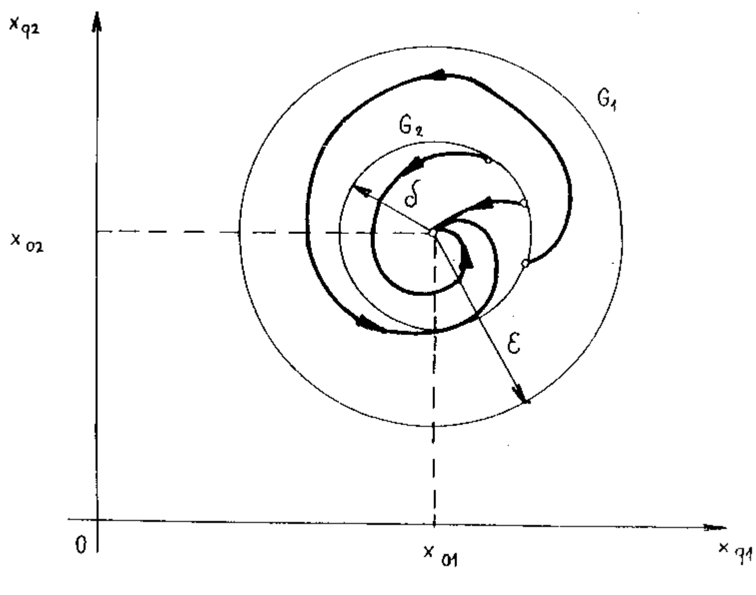
kde x_0 (0) predstavuje začiatok nenabudeného pohybu .

Pohyb je potom stabilný v zmysle Ljapunova , ak pre každú guľu G_1 so stredom v x_0 (t) a s polomerom ε existuje taká guľa G_2 so stredom v x_0 (0) a s polomerom δ , že tvoriaci bod všetkých trajektórií , začínajúcich na povrchu alebo vnútri gule G_2 ostáva pre všetky t > t_0 vnútri gule G_1 .

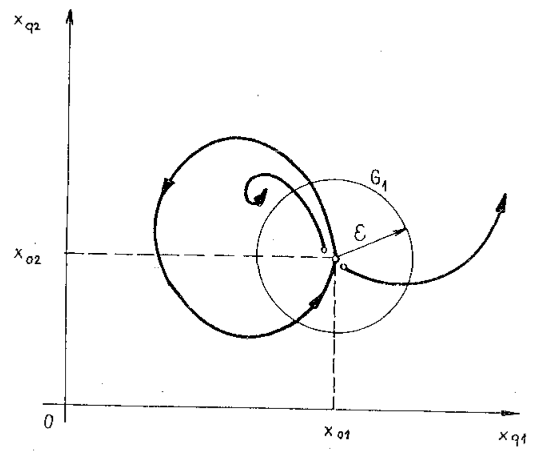
Pre sústavu druhého rádu (n=2) degenerujú gule na kružnice . Ak je nenebudený pohyb vo fázovej rovine reprezentovaný singulárnym bodom a teda nie je závislý na čase , potom majú trajektórie pohybu stabilného v zmysle Ljapunova tvar podľa obr.a . Ak je pohyb asymptoticky stabilný v zmysle Ljapunova , trajktorie majú tvar podľa obr.b a pre pohyb nestabilný podľa obr.c . Pritom rovnice (2) nie sú v substitučnom tvare a preto trajektórie nemusia mať priebeh podľa pravidiel.


x_{q2}
G_1
G_2
δ
x_{02}
ε
0
x_{01}
x_{q1}

obr. a


x_{q2}
G_1
G_2
δ
x_{02}
ε
0
x_{01}
x_{q1}

obr. b

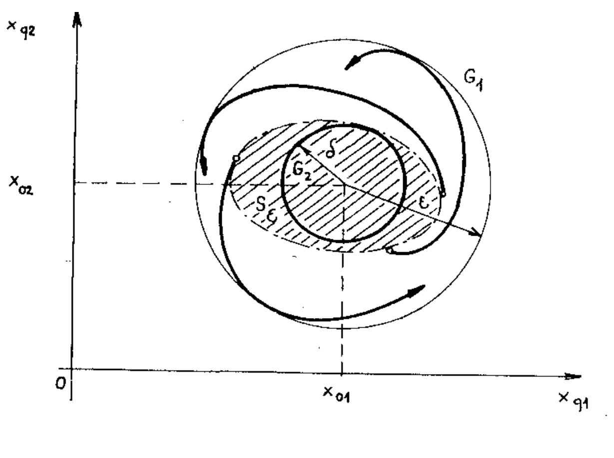


obr. c

Formulácia stability podľa Ljapunova predstavuje postačujúcu podmienku pre priestor poruchových vektorov q , ktorá zaručuje , že trajektórie nabudených pohybov x_q (t) , odpovedajúcich vektorom q z danej gule G_2 nevybočia z vopred danej gule G_1 . V podstate sa jedná o formuláciu podmienky existencie istej oblasti prípustných hodnôt vektora q .

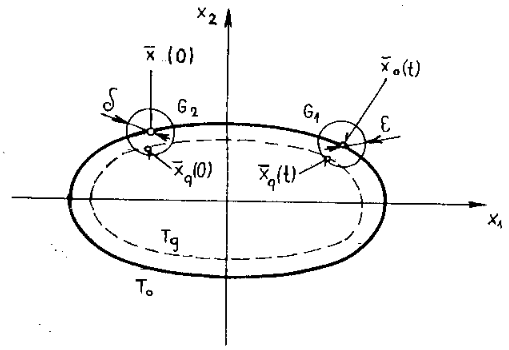
Často sa v tejto súvislosti hovorí o podmienke stability v malom . Je však možná aj iná formulácia úlohy o stabilite : Nájsť celú oblasť koncových bodov poruchových vektorov q , pre ktoré trajektorie nabudeného pohybu nevybočia z gule G_1 . Takáto oblasť však závisí na voľbe ε a možno ju preto označiť Sε . Pritom sa hľadá najväčšia oblasť pre vektory q , ktorá ešte zaručuje , že trajektorie nabudeného pohybu budú stále vnútri gule G_1 . Takto formulovaná úloha sa niekedy označuje ako hľadanie podmienky stability vo veľkom . Guľa G_2 je časťou oblasti Sε a dotýka sa jej hraničnej plochy v jednom bode , či pozdĺž nejakej krivky , resp. G_2 a Sε môžu byť aj totožné . Pre dvojrozmernú úlohu je vyšetrovanie stability vo veľkom znázornené na obr.d .

Aj v prípade asymptotickej stability možno postupovať podobným spôsobom hľadá sa najväčšia oblasť S v priestore poruchových vektorov q , ktorá ešte zaručuje asymptotickú stabilitu všetkých trajektórií x_q (t) . Takáto oblasť sa niekedy označuje ako spádová oblasť . Ak spádovou oblasťou je celý priestor poruchových vektorov q , hovorí sa o asymptotickej stabilite v celom .

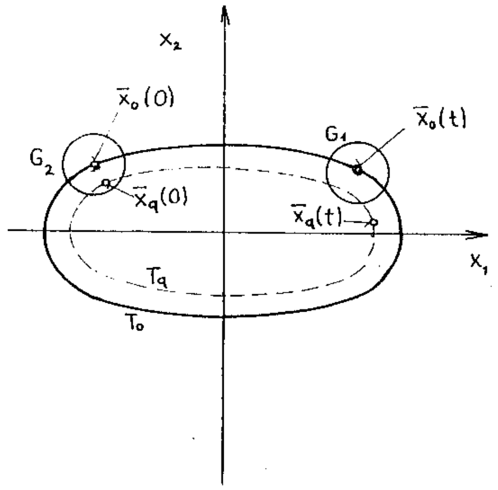


obr. d

V prípade , že nabudený pohyb x_0 (t) je funkciou času (nie je reprezentovaný bodom) , potom sa aj stred gule G_1 (a s ním aj celá guľa) pohybuje po trajektórii , odpovedajúcej príslušnej trajektórii nenabudeného pohybu . Pre uzavretú trajektóriu x_0 (t) sú pomery $T_0 = T_q$ znázornené na obr.e a pre $T_0 \neq T_q$ na obr.f . V prvom prípade sa jedná o pohyb stabilný v zmysle Ljapunova (ale nie asymptoticky) , kdežto v druhom prípade o pohyb nestabilný .



obr. e



obr. f

Priama Ljapunova metóda vyšetrovania stability

Základnou myšlienkou priamej Ljapunovej metódy je , že je možné posúdiť stabilitu pohybu sústavy aj bez znalosti celého priebehu jemu odpovedajúcej trajektórie . Ljapunova metóda je zovšeobecnením Lagrangeovho tvrdenia , že postačujúcou podmienkou stability rovnovážneho stavu x_S sústavy je , aby celková energia sústavy bola v tomto stave (odpovedá mu singulárny bod stavového priestoru) minimálna . V ďalšom budeme predpokladať , že vyšetrovaným singulárnym bodom je počiatok súradníc . Ak tomu tak nie je , je potrebné urobiť transformáciu

$$\overline{x} = \overline{x} - \overline{x}_S \text{..............(1)}$$

K pochopeniu ďalších úvah je nutná znalosť niektorých pojmov : Funkcia

$$V(\overline{x}) = v(x_1, x_2, ..., x_n) \text{................(2)}$$

je pozitívne (negatívne) definitná , ak v okolí počiatku súradníc priestoru P[x_1, x_2 ,..., x_n] má kladnú (zápornú) hodnotu a v samotnom počiatku (a iba v ňom) má hodnotu nulovú . Funkcia (2) je poztívne (negatívne) semidefinitná , ak má nulovú hodnotu aj v iných bodoch uvažovanej oblasti nielen v počiatku a ak v ostatných bodoch okolia počiatku nadobúda kladnú (zápornú) hodnotu . Indefinitná funkcia má v uvažovanej oblasti aj kladné , aj záporné hodnoty .

Podľa Lagrangeovho tvrdenia klesá celková energia sústavy pri pohybe smerom k rovnovážnemu stavu sústavy , ak tento stav je stabilný . Ljapunov vlastne zovšeobecnil uvedené tvrdenie .

Predpokladajme , že vyšetrovaná sústava je opísaná rovnicami

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = 1,2,..., n ....(3)$$

potom Ljapunovými funkciami budeme označovať pozitívne definitné funkcie typu (2) . Je možné určiť deriváciu podľa času .

$$W(\bar{x}) = \frac{dV(\bar{x})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} ....(4)$$

a po zohľadnení (3) je možné písať

$$W(\bar{x}) = \frac{dV(\bar{x})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) ....(5)$$

Počiatok súradníc n-rozmerného stavového priestoru odpovedá stabilnému rovnovážnemu stavu , ak v okolí počiatku je funkcia W(x) negatívne definitná , jedná sa o asymptotickú stabilitu . Ak funkcia W(x) je negatívne definitná v celom stavovom priestore , potom sa jedná o prípad asymptotickej stability v celom . Geometrický význam takto definovanej asymptotickej stability je , že fázové trajektórie musia v uvažovanom okolí počiatku pretínať plochy

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = C = konst.$$

smerom od väčších hodnôt C k hodnotám menším .

Nevýhodou uvedenej metódy je , že poskytuje iba postačujúce podmienky stability , t.j. ak podmienky stability sú splnené , potom uvažovaný rovnovážny stav je určite stabilný , ale z nesplnenia týchto podmienok nevyplýva nutne nestabilita vyšetrovaného rovnovážneho stavu . Nie je ani zaručené , že oblasť stavového priestoru , v ktorom platí uvedená podmienka stability reprezentuje celú skutočnú oblasť stability (oblasť stability vo veľkom) . Súvisí to so skutočnosťou , že voľba Ljapunovej funkcie pre danú sústavu nie je jednoznačná a že niektoré funkcie reprezentujú prísnejšie , iné zas menej prísne podmienky stability . Ďalšou nevýhodou priamej Ljapunovej metódy je , že neposkytuje algoritmus , generovanej vhodnej Ljapunovej funkcie . Viacero autorov sa pokúsilo odstrániť túto nevýhodu , ale zatiaľ sa podarilo nájsť algoritmy generovania iba pre určité triedy nelineárnych sústav .

Pre lineárnu sústavu druhého rádu

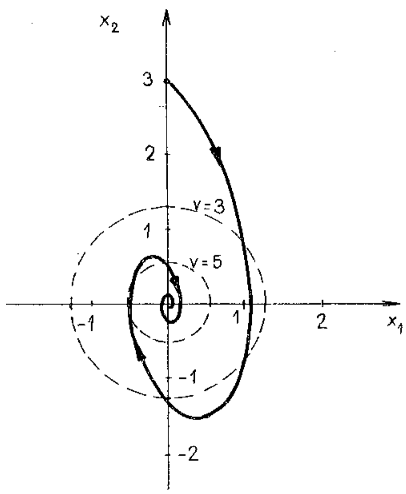
$$v'' + a_1 v' + a_0 v = 0 ....(7)$$

je kanonický tvar opisujúcich rovníc

$$x_1 = v$$
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \text{...........................(8)}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_2 - a_0 x_1$$

Singulárnym bodom je počiatok súradníc fázovej roviny . Pre hodnoty $a_1 = 1$, $a_0 = 4$ sa jedná o stabilné ohnisko . Núka sa možnosť voliť Ljapunovovou funkciou v tvare

$$V(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 \text{....................(9)}$$



Krivky konštantných hodnôt tejto funkcie sú kružnice so stredom v počiatku , fázové trajektórie ich však nepretínajú iba od hodnôt väčších k hodnotám menším (obr.) . Ljapunova funkcia podľa (9) bola zrejme nevhodne volená , jej derivácia podľa času je vo vzťahu (5)

$$W(\bar{x}) = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 x_2 - 2a_1 x_2^2 - 2a_0 x_1 x_2 = \text{..................(10)}$$
$$= -2x_2^2 - 6x_1 x_2$$

Táto funkcia je indefinitná , stabilitu singulárneho bodu teda nie je možné jednoznačne posúdiť .

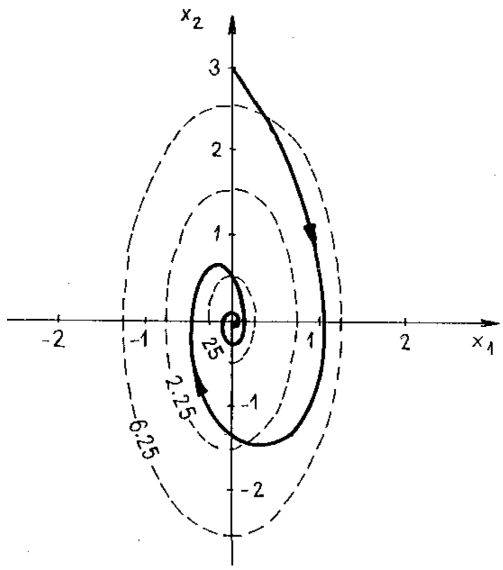
Pri voľbe inej Ljapunovej funkcie

$$V(\bar{x}) = a_0 x_1^2 + x_2^2 = 4x_1^2 + x_2^2 \text{............................(11)}$$

získame jej deriváciu podľa času

$$W(\bar{x}) = 2a_0 x_1 x_2 - 2a_1 x_2^2 - 2a_0 x_1 x_2 = -2a_1 x_2^2 = -2x_2^2 \text{...................(12)}$$

ktorá je v celej fázovej rovine negatívne definitná , jedná sa teda o asymptotickú stabilitu v celom (obr.) .



K tomu istému výsledku nás dovedie aj voľba Ljapunovej funkcie v tvare :

$$V(\bar{x}) = \left(1 + \frac{a_1}{a_0}\right)x_1^2 + \frac{2a_1}{a_0}x_1x_2 + \frac{x_2^2}{a_0} = 1{,}25x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}25x_2^2 \text{...........}(13)$$

ktorej derivácia podľa času je :

$$W(\bar{x}) = -2a_1x_2^2 = -2x_1^2 \text{..................}(14)$$

Príslušné krivky konštantných hodnôt Ljapunovej funkcie sú spolu s jednou fázovou trajektoriou znázornené na obr.