3.3 METÓDA LINEARIZÁCIE

3.3.1 Podmienky linearizácie

V podstate všetky reálne sústavy sú nelineárne. Ak sú však zmeny premenných malé a charakteristiky nelinearít sú v okolí pracovného bodu spojité a diferencovateľné, potom je možné známe z teórie lineárnych sústav. Presnosť dosiahnutých výsledkov výrazne závisí na splnení uvedených podmienok linearizácie. Najmä neopodstatnené zanedbanie niektorých parazitných nelinearít môže hrubo skresliť výsledok.
Metóda linearizácie nie je použiteľná pre sústavy s typickými nelinearitami.

3.3.2 Určenie parametrov linearizovanej sústavy

Nech je sústava opísaná vzťahom

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$

kde y je výstup sústavy (prípadne jeho n-tá derivácia), x_i sú ľubovoľné vstupné, či výstupné parametre prípadne ich derivácie – pre výstupnú do radu (n-1) a f je nelineárna funkcia.
Lineárna náhrada má tvar

$$y \doteq A_0 + A_1.x_1 + ... + A_n.x_n\,, \qquad (2)$$

kde A_i sú parametre linearizovanej sústavy. Náhradu možno zapísať aj v odchýlkovom tvare

$$\Delta y = y - Y = \sum_{i=1}^{n} A_i.\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} A_i.(x_i - X_i) \qquad (3)$$

kde Y je hodnota funkcie (1) v pracovnom bode ($x_1, x_2, ... , x_n$).

Ak je funkcia (1) analytická a v okolí pracovného bodu je spojitá a ľubovoľnekrát diferencovateľná, je možné ju rozpísať do Taylorovho radu. Za predpokladu malých hodnôt Δx_i možno členy vyšších rádov zanedbať a platí

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}=\bar{X}} \qquad (4)$$

možno uvedeným spôsobom nájsť lineárnu aproximáciu napr. pre pracovný bod v=0, v'=0;

$$y = y''; x_1 = v; x_2 = v'; y = (1 - x_1^2)x_2 - x_1 \qquad (12)$$

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1 - x_1^2)x_2 - x_1\right]_{x_2=0}^{x_1=0} = -2x_1x_2 - 1\,\Big|_{x_2=0}^{x_1=0} = -1 \quad (13)$$

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1 - x_1^2)x_2 - x_1\right]_{x_2=0}^{x_1=0} = 1 - x_1^2\,\Big|_{x_2=0}^{x_1=0} = -1 \qquad (14)$$

$$Y = A_0 = 0 \qquad (15)$$

$$y \doteq x_2 - x_1 \qquad (16)$$

Hľadaná lineárna náhrada je podľa (12) a (16)

$$v'' - v' + v = 0 \; (17)$$

3.3.3 Nepriama Ljapunova metóda vyšetrovania stability

Ak sa za pracovný bod zvolí rovnovážny stav nelineárnej sústavy, potom je podľa prvého (nepriameho) Ljapunovho kritéria možné posúdiť stabilitu tejto sústavy v okolí pracovného bodu na základe vlastností lineárnej náhrady. Ak všetky korene charakteristickej rovnice (prislúchajúcej aproximačnej lineárnej sústave) majú zápornú reálnu časť, je chovanie vyšetrovanej sústavy v okolí pracovného bodu stabilné. Ak aspoň jeden z koreňov má kladnú reálnu časť, chovanie sústavy je nestabilné. V prípade, že reálna časť koreňa je nulová, sú pre určenie stability podstatné aj zložky vyšších rádov a z lineárnej náhrady nie je možné posúdiť jednoznačne stabilitu chovanie sústavy.

V prípade Van der Polovej rovnice (11) sú korene lineárnej náhrady (17) kapitola 3.3.2 rovné $0{,}5 \pm 0{,}86i$, a chovanie sústavy je v okolí rovnovážneho stavu $v = v' = 0$ nestabilné.

Ak nelineárna sústava je opísaná sústavou deferenciálnych rovníc 1. rádu v kanonickom tvare (rovnica (2) odseku 3.1.3) a ak tieto rovnice spĺňajú podmienky linearizovateľnosti, potom má príslušná lineárna náhrada tvar

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}.\Delta x_j \qquad (1)$$

Porovnaním (2), (3) a (4) sa získajú hľadané parametre linearizovanej sústavy

$$A_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}=\bar{X}} \quad i = 1,2,..,n; A_0 = Y - \sum_{i=1}^{n} A_i.x_i \qquad (5)$$

V praxi sa pri určovaní parametrov postupuje tak, že sa do (1) dosadí

$$x_i = X_i + \Delta x_i \quad (6)$$

a zanedbajú sa vyššie mocniny diferencií. Tým sa získa lineárna náhrada (2).

Ak je napr. potrebné linearizovať vzťah

$$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad (7)$$

v okolí bodu x_1=6 ; x_2=2, potom hľadané parametre sú podľa (5) rovné

$$A_1 = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right|_{\bar{x}=\bar{X}} = \left.\frac{1}{x_2}\right|_{x_2=2} = 0{,}5$$

$$A_2 = \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right|_{\bar{x}=\bar{X}} = -\left.\frac{x_1}{x_2^2}\right|_{\substack{x_1=6\\x_2=2}} = -1{,}5 \qquad (8)$$

$$A_0 = \frac{x_1}{x_2} - A_1.X_1 - A_2.X_2 = -3$$

K tomu istému výsledku dospejeme použitím aproximačného vzťahu

$$(1+\Delta x)^n = 1 + n.\Delta x \qquad (9)$$

po dosadení z (6) do (7)

$$y = \frac{6+\Delta x_1}{2+\Delta x_2} = \frac{3+0{,}5\Delta x_1}{1+0{,}5\Delta x_2} = (3+0{,}5\Delta x_1)(1-0{,}5\Delta x_2) \dot{=} 3 + 0{,}5\Delta x_1 - 1{,}5\Delta x_2 \qquad (10)$$

V prípade Van der Polovej diferenciálnej rovnice

$$v'' - (1-v^2)v' + v = 0 \qquad (11)$$

kde

$$A_{1j} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}=\bar{X}} \qquad (2)$$

a charakteristická rovnica má tvar

$$\begin{vmatrix} (A_{11}-p) & A_{12} & \bullet\bullet\bullet & A_{1n} \\ A_{21} & (A_{22}-p) & \bullet\bullet\bullet & A_{2n} \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ A_{n1} & A_{n2} & & (A_{nn}-p) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$