Absolútna stabilita nelineárnych sústav

Pojem absolútnej stability

Metódy vyšetrovania stability nelineárnych sústav majú isté obmedzenia , najmä z hľadiska ich praktickej aplikácie .

Metóda harmonickej linearizácie sa hodí iba na vyšetrovanie periodických , resp. kváziperiodických pochodov a na existenciu stabilného rovnovážneho stavu možno usudzovať iba nepriamo . Využitie metódy stavového priestoru je praktické iba pre sústavy prvého alebo druhého rádu . Použitie priamej Ljapunovovej metódy naráža na ťažkosti s generovaním vhodných Ljapunovových funkcií .

Celý rad autorov sa pokúšal nájsť kritérium pre asymptotickú stabilitu v celom iba na základe vlastnosti lineárnej časti sústavy , ak charakteristika nelinearity spĺňa isté predpoklady . Vyšetrovanie sa však robilo v časovej oblasti a generovanie potrebných Ljapunovových funkcií bolo obťažné , naviac pre niektoré špeciálne prípady tieto metódy zlyhávali .

V roku 1959 navrhol rumunský matematik Popov nové kritérium absolútnej stability , opierajúce sa o rozbor vo frekvenčnej oblasti . Jedná sa o exaktné kritérium , použiteľné pre širokú triedu nelineárnych sústav , ktoré má jednoduchú a názornú geometrickú interpretáciu , veľmi výhodnú pre praktické použitie .

Predpokladá sa , podobne ako v prípade metódy harmonickej rovnováhy , že nelineárna sústava pozostáva z lineárnej časti a z izolovanej statickej nelinearity s charakteristikou

$$v = f(u) \qquad (1)$$

pričom platí

$$f(u) = 0 \quad \text{pre} \quad u = 0 \qquad (2)$$

$$0 \le \frac{f(u)}{u} \le K \quad \text{pre} \quad u \ne 0 \qquad (3)$$

O funkcii f(u) predpokladáme , že je definovaná pre všetky u a že je jednoznačná a po úsekoch spojitá . Podmienku (3) budeme slovne označovať „charakteristika f(u) leží v sektore <0,K>“. Potom možno vysloviť definíciu

Nelineárna sústava je absolútne stabilná v sektore <0,K> , ak pre všetky charakteristiky f(u) statickej nelinearity , ležiace v tomto sektore má daná sústava jeden asymptoticky stabilný (v celom) rovnovážny stav .

Je možné vyšetrovať aj absolútnu stabilitu obvodov , v ktorých charakteristika nelinearity je zo sektoru $<K_1 ,K_2>$, je však potrebné ich vhodnou transformáciou upraviť , aby príslušný sektor bol $<0,K_2 - K_1>$.

Popovovo kritérium

Je zadaná nelineárna sústava , tvorená lineárnou časťou s prenosom

$$F_L(s) = \frac{1}{s^k}\frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n} \qquad (1)$$

kde a_i , b_i sú reálne koeficienty , a kde k,m,n sú celé čísla , pre ktoré platí

$$0 \le k \le 2; \qquad m < k + n \qquad (2)$$

a statickou nelinearitou , ktorej charakteristika $v = f(u)$ je definovaná pre všetky n , je jednoznačná , po úsekoch spojitá a prechádza cez nulu . Pre $k = 0$ musí byť takáto charakteristika zo sektoru <0,K> , pričom K je ľubovoľné kladné číslo (môže byť aj $K = \infty$) . Pre astatický prenos (1) , t.j. pre K = 1,2 musí byť statická charakteristika nelinearity zo sektoru (0,K> , kde K je ľubovoľné konečné kladné číslo . Pre K = 2 musí naviac platiť $a_1 < b_1$. Okrúhla zátvorka pri označení dolnej hranice sektoru znamená , že hodnota nula je zo sektoru vylúčená , t.j. že do sektoru nepatria nelinearity s nulovou smernicou v počiatku (napr. $v = u^3$, relé s necitlivosťou) a nelinearity , pre ktoré smernice charakteristiky s rastúcim u limituje k nule .

Pri splnení uvedených podmienok je vyšetrovaná sústava absolútne stabilná v sektore <0,K> (resp. v sektore (0,K>) , ak existuje reálne číslo q také , že platí

$$\mathrm{Re}[(1+\mathrm{q}i\omega)\mathrm{F_L}(i\omega)] > -\frac{1}{K} \qquad (3)$$

pre $\omega \geq 0$. Táto podmienka je podmienkou postačujúcou , ale nie nutnou . Uvedené kritérium je možné ešte trochu rozšíriť . Ak k = 1 a existuje reálne číslo q také , že platí podmienka

$$\mathrm{Re}[(1+\mathrm{q}i\omega)\mathrm{F_L}(i\omega)] \geq 0 \qquad (4)$$

potom je vyšetrovaná sústava absolútne stabilná v sektore (0 , ∞) .

Veľkou výhodou Popovovho kritéria je , že umožní posúdiť absolútnu stabilitu sústavy v podstate na základe vlastností lineárnej časti , nakoľko predpoklady o charaktere nelinearity sú veľmi voľné . Je tak možné posúdiť stabilitu sústavy pre celú triedu nelinearít a to dokonca aj pre nelinearity , ktorých statické charakteristiky nie sú presne známe alebo sa časom menia (musia však vždy ležať v uvažovanom sektore) .

Podmienky (3) resp. (4) sú zdanlivo veľmi abstraktné . Pri syntéze , keď nepoznáme hodnotu k , je potrebné riešiť napr. nerovnicu (4) pre dve neznáme k a q . V prípade jednoduchých systémov je však možné priamo použiť vzťahy (3) alebo (4) .

Nech prenos lineárnej časti sústavy je napr.

$$F_L(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \qquad (5)$$

pričom $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Popovova nerovnosť (3) má potom tvar

$$\mathrm{Re}\frac{1+\mathrm{q}i\omega}{1+\mathrm{a}_1 i\omega - a_2\omega^2} > -\frac{1}{K} \qquad (6)$$

a po úprave

$$\frac{(\mathrm{qa}_1 - a_2)\omega^2 + 1}{(1-\mathrm{a}_2\omega^2)^2 + a_1^2\omega^2} > -\frac{1}{K} \qquad (7)$$

Ak leží statická charakteristika nelinearity kdekoľvek v I a III kvadrante , potom $K = \infty$ a v nerovnosti (7) musí byť ľavá strana pre všetky $\omega > 0$ nezáporná . Pre všetky

$$\mathrm{q} \geq \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_2} \qquad (8)$$

je uvedená podmienka splnená a teda všetky nelineárne sústavy , tvorené lineárnou časťou druhého rádu podľa (5) pre a_1 , $a_2 > 0$ sú absolútne stabilné v sektore < 0 , ∞) .

Geometrická interpretácia Popovovho kritéria

Priame použitie vzťahov (5) a (6) je v prípade zložitejších úloh nepraktické . Oveľa výhodnejšie je v tomto prípade grafická inetrpretácia Popovovho kritéria , t.j. použite Popovovej charakteristiky .

Popovovu nerovnosť (3) z predchádzajúcej kapitoly možno prepísať na tvar

$$\mathrm{ReF_L}(i\omega) + q\,\mathrm{Re}[i\omega F_L(i\omega)] > -\frac{1}{K} \qquad (1)$$

a po zohľadnení vzťahu

$$\begin{aligned} i\omega L(i\omega) &= i\omega[\mathrm{Re}\,L(i\omega) + i\,\mathrm{Im}\,L(i\omega)] = \\ &= -\omega\,\mathrm{Im}\,L(i\omega) + i\omega\,\mathrm{Re}\,L(i\omega) \qquad (2) \end{aligned}$$

upraviť ďalej na tvar

$$\mathrm{ReF_L}(i\omega) - q\,\mathrm{Im}\,F_L(i\omega) > -\frac{1}{K} \qquad (3)$$

Popovova charakteristika je opísaná parametrickými rovnicami

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}^* &= \mathrm{ReF_L}(i\omega) \\ \mathrm{Im}^* &= \omega\,\mathrm{Im}\,F_L(i\omega) \qquad (4) \end{aligned}$$

z ktorých je zrejmé , že reálne zložky Popovovej aj Nyquistovej charakteristiky sú rovnaké, zatiaľ čo imaginárna zložka Popovovej charakteristiky je ω - násobkom imaginárnej zložky Nyquistovej charakteristiky . Nerovnosť (3) má s použitím označenia (4) nový tvar

$$\mathrm{Re}^* \text{-q}\mathrm{Im}^* + \frac{1}{\mathrm{K}} > 0 \qquad (5)$$

$$\mathrm{Im}^* = \frac{1}{\mathrm{q}}(\mathrm{Re}^* + \frac{1}{K}) \qquad (6)$$

Geometricky predstavuje táto nerovnosť polrovinu ležiacu napravo od priamky . Je to tzv. Popovova priamka , prechádza bodom (-1/K , 0) a má sklon 1/q (obr. dole) , pričom oblasť podľa (5) je vyšrafovaná .

Geometrická interpretácia Popovovho kritéria je teda nasledovná . Nelineárna sústava je absolútne stabilná v sektore <0,K> (resp. (0,K> pre nestatickú lineárnu časť) , ak existuje taká priamka, prechádzajúca bodom (-1/K , 0) , od ktorej napravo leží celá Popovova charakteristika .

Nech lineárna sústava má tvar podľa obr. hore pre a0 = 1 , a1 = 5,125 , a2 = 27,1875 , a3 = 10,9375 , a4 = 39,0625 , b = 0,2 . Nyquistova charakteristika je pre uvažovaný typ sústavy daná vzťahom

$$F_L(i\omega) = \frac{a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + 1 + i\omega(a_3\omega^3 - a_1)}{(a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + 1)^2 + \omega^2(a_3\omega^3 - a_1)^2} \tag{7}$$

a pre zložky Popovovej charakteristiky podľa (4) platí

$$\mathrm{Re}^* = \frac{a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + 1}{(a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + 1)^2 + \omega^2(a_3\omega^3 - a_1)^2} \tag{8}$$

$$\mathrm{Im}^* = \frac{\omega^2(a_3\omega^3 - a_1)}{(a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + 1)^2 + \omega^2(a_3\omega^3 - a_1)^2}$$

Na obr. hore je znázornený priebeh tejto charakteristiky aj s kritickou Popovovou priamkou (Popovovou priamkou , odpovedajúcou maximálnej hodnote K , pre ktorú je sústava absolútne stabilná) . Pre vyšetrovaný prípad je sústava absolútne stabilná v sektore <0,2 , 33> a kritická hodnota parametra k je

$$k = K0{,}2 = 0{,}47 \tag{9}$$