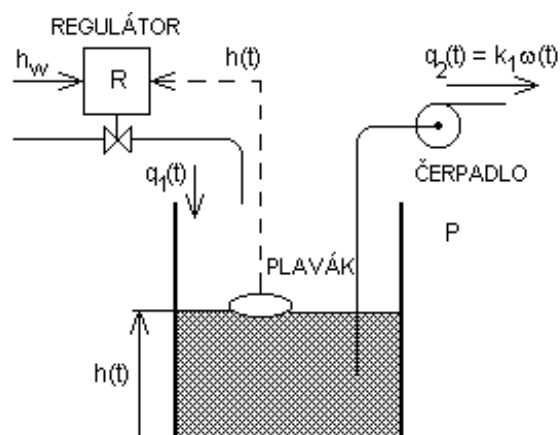


1 Regulačné obvody

1.1 Regulácia nádrže s odčerpávaním

Pre regulačný obvod s regulovanou sústavou - nádrž s odčerpávaním vykonáme analýzu s dvojpohovým a analógovým regulátorom typu P vid' **Obr. 1**.



$q_1(t)$ – objemový prítok kvapaliny [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$],

$q_2(t)$ – objemový odtok kvapaliny [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$],

$h(t)$ – výška hladiny [m],

P – plošný obsah hladiny [m^2],

$\omega(t)$ – uhlová rýchlosť čerpadla [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$],

k_1 – konštanta [$\text{m}^3 \cdot \text{rad}^{-1}$],

Obr. 1 : Zjednodušená schéma regulačného obvodu pre nádrž s odčerpávaním

Matematický model

Pre elementárny prírastok objemu kvapaliny v nádrži $P dh(t)$ za elementárny časový prírastok dt platí bilančná rovnica

$$P dh(t) = q_1(t) dt - q_2(t) dt .$$

Po úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu 1. rádu

$$P \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) ,$$

$$\text{resp.} \quad P \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - k_1 \omega(t) , \quad (1)$$

s počiatočnou podmienkou (počiatočná výška hladiny)

$$h(0) = h_0 . \quad (2)$$

Diferenciálnu rovnicu (1) môžeme napísať v ekvivalentnom integrálnom tvare

$$h(t) = \frac{1}{P} \int_0^t [q_1(\tau) - k_1 \omega(\tau)] d\tau + h_0 . \quad (3)$$

Nádrž s odčerpávaním má vlastnosti intergačného prvku. Vzhľadom k integračnému charakteru regulovanej sústavy neexistuje v ustálenom stave závislosť medzi výstupom h_u a vstupmi q_{u1} a ω_u , resp. q_{u2} , tj. regulovaná sústava nemá statickú charakteristiku. Pre ustálený výstup platí

$$q_2(t) = q_1(t) , \quad (4a)$$

pre ustálený stav musí navyše platiť

$$q_2(t) = q_{2u} = q_1(t) = q_{1u} = \text{konšt.} , \quad (4b)$$

resp.
$$\omega_u = \frac{1}{k_1} q_{u1} , \quad (5)$$

pričom ustálená výška hladiny h_u môže mať akúkoľvek „rozumnú“ kladnú hodnotu, pretože pre výšku hladiny platí iba obmedzenie

$$0 \leq h(t) \leq h_{\max} , \quad (6)$$

kde je h_{\max} maximálna výška hladiny daná konštrukciou nádrže [m].

Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice (1) s počiatočnou podmienkou (2) alebo integrálneho vzťahu (3) získame popis vlastností nádrže s odčerpávaním v oblasti komplexnej premennej

$$H(s) = \frac{1}{Ps} [Q_1(s) - k_1 \Omega(s)] + \frac{h_0}{s} , \quad (7)$$

kde $H(s)$, $Q_1(s)$ a $\Omega(s)$ sú obrazy príslušných premenných $h(t)$, $q_1(t)$ a $\omega(t)$.

a) Dvojpohový regulátor

Budeme predpokladať najjednoduchší dvojpohový regulátor, ktorý je realizovaný solenoidovým ventilom. Jeho činnosť môžeme popísať vzťahmi :

$$q_1(t) = \begin{cases} q_{1m} & \text{pre } h(t) < h_w - \frac{h}{2} \\ 0 & \text{pre } h(t) \geq h_w + \frac{h}{2} \end{cases} , \quad (8)$$

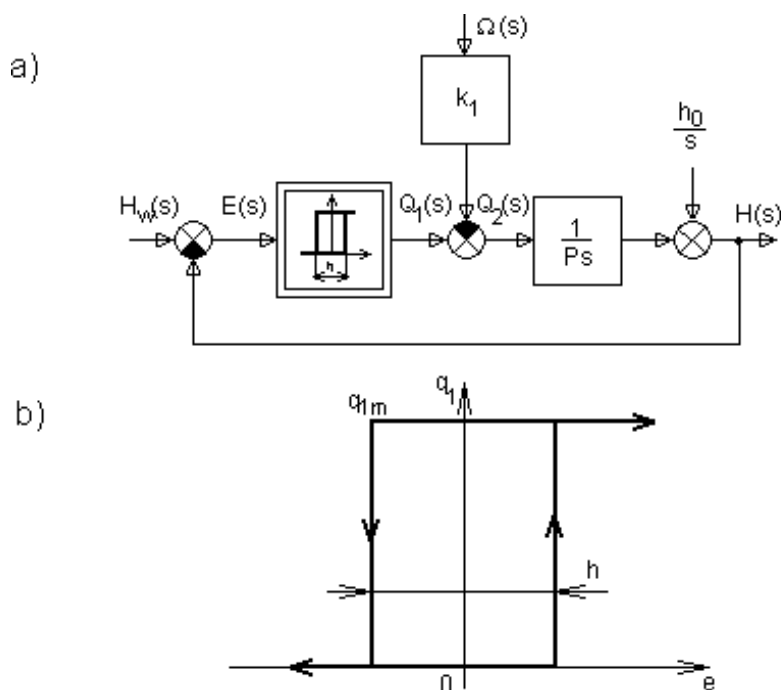
kde je h_w - požadovaná výška hladiny [m],
 h - šírka hysterézie dvojpohového regulátora [m],
 q_{1m} - maximálny prítok [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$].

Je zrejmé, že regulácia môže byť účinná len pre

$$q_1(t) > q_2(t) , \quad (9a)$$

tj.
$$q_{1m} > q_2(t) . \quad (9b)$$

Pretože ide o nelineárny regulačný obvod, analýzu jeho vlastností uskutočnime číslicovou simuláciou.



Obr. 2 : Dvojpolohová regulácia výšky hladiny : bloková schéma regulačného obvodu-(a),statická charakteristika dvojpolohového regulátora-(b)

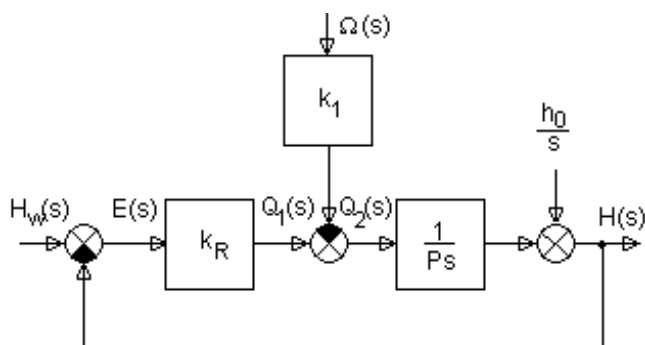
b) Analógový regulátor typu P

Analógový regulátor proporcionálneho typu je najjednoduchší spojitý regulátor, ktorý v našom prípade môžeme v oblasti komplexnej premennej popísať rovnicami (**Obr. 3**) :

$$Q_1(s) = k_R E(s) , \quad (10a)$$

$$E(s) = H_w(s) - H(s) , \quad (10b)$$

kde je $E(s)$ - obraz regulačnej odchýlky,
 k_R - zosilnenie regulátora [$m^2 s^{-1}$].



Obr. 3 : Bloková schéma regulačného obvodu s analógovým regulátorom typu P

Pre regulačný obvod na **Obr. 3** platí

$$H(s) = \frac{1}{\frac{P}{k_R} s + 1} H_w(s) - \frac{\frac{1}{k_R}}{\frac{P}{k_R} s + 1} Q_2(s) + \frac{\frac{P}{k_R}}{\frac{P}{k_R} s + 1} h_0 , \quad (11a)$$

$$Q_2(s) = k_1 \Omega(s) , \quad (11b)$$

resp.
$$H(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} H_w(s) - \frac{\frac{1}{k_R}}{T_1 s + 1} Q_2(s) + \frac{T_1}{T_1 s + 1} h_0 , \quad (12a)$$

$$T_1 = \frac{P}{k_R} , \quad (12b)$$

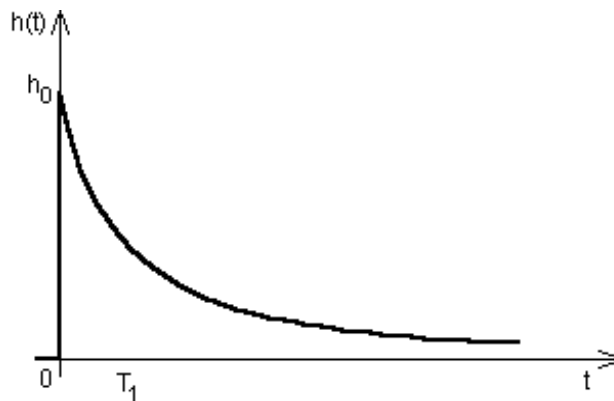
kde T_1 je časová konštanta [s].

Za poruchovú veličinu budeme považovať odčerpávané množstvo $q_2(t)$.

Zo vzťahu (12a) vyplýva, že počiatočná výška h_0 má vplyv iba na prechodový proces, pretože platí (**Obr. 4**)

$$L^{-1} \left\{ \frac{T_1 h_0}{T_1 s + 1} \right\} = h_0 e^{-\frac{t}{T_1}} . \quad (13)$$

Z tohoto dôvodu sa vplyv počiatočnej výšky h_0 (počiatočnej podmienky) často pri analýze a syntéze regulačných obvodov neuvažuje.



Obr. 4 : Prechodová zložka spôsobená počiatočnou výškou h_0

Pretože úlohou regulácie je udržiavať výšku hladiny $h(t)$ na požadovanej konštantnej výške h_w , pre ustálený stav platí

$$h_u = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) , \quad (14)$$

tj.

$$h_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{T_1 s + 1} \frac{h_w}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{s}{k_R}}{T_1 s + 1} Q_2(s) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1 s}{T_1 s + 1} h_0 ,$$

$$h_u = h_w - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{s}{k_R}}{T_1 s + 1} Q_2(s) . \quad (15)$$

Zo vzťahu (15) vyplýva, že pri použití proporčionálneho regulátora (regulátora typu P) v regulačnom obvode zostane trvalá regulačná odchýlka, veľkosť ktorej závisí na odčerpanom množstve $q_2(t)$, tj.

$$e(\infty) = h_w - h(\infty) = h_w - h_u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{s}{k_R}}{T_1 s + 1} Q_2(s) . \quad (16)$$

Pre skokovú zmenu polohy

$$q_2(t) = q_{2u} \triangleq Q_2(s) = \frac{q_{2u}}{s} , \quad (17)$$

dostaneme

$$e(\infty) = \frac{q_{2u}}{k_R} . \quad (18)$$

Trvalá regulačná odchýlka (18) bude tým menšia čím väčšie bude zosilnenie regulátora k_R .

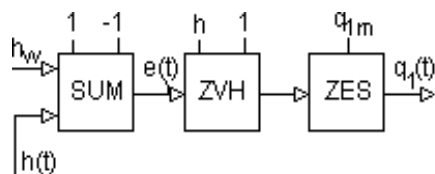
Zosilnenie regulátora k_R má vplyv na dynamiku celého regulačného obvodu, vid' vzťah (12b).

Simulačný model

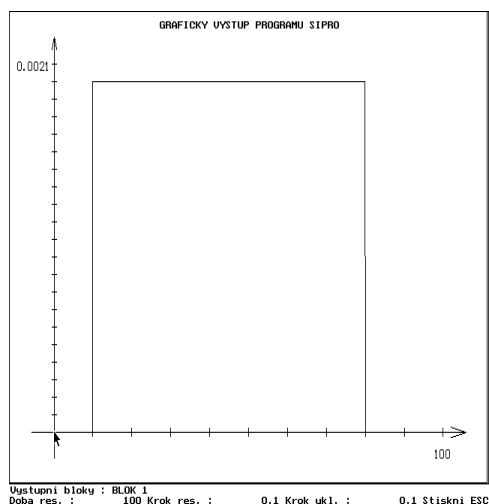
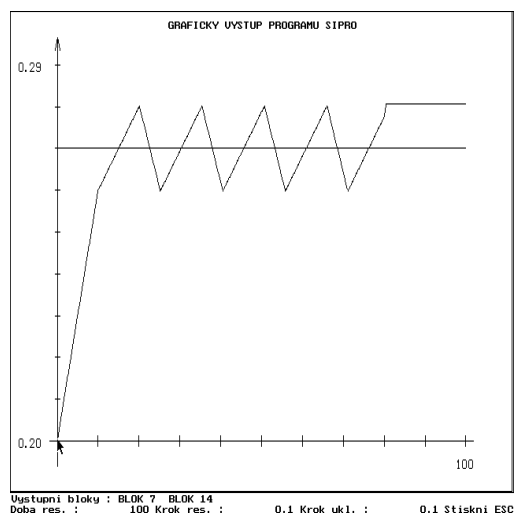
Pre simuláciu využijeme časť schémy z príkladu nádrže s odčerpávaním.

a) Dvojpolohový regulátor {súbor NAD_O_RD.SIP}

Simulačnú schému na **Obr. 7** doplníme o zapojenie s dvojpolohovým regulátorom na **Obr. 5**.



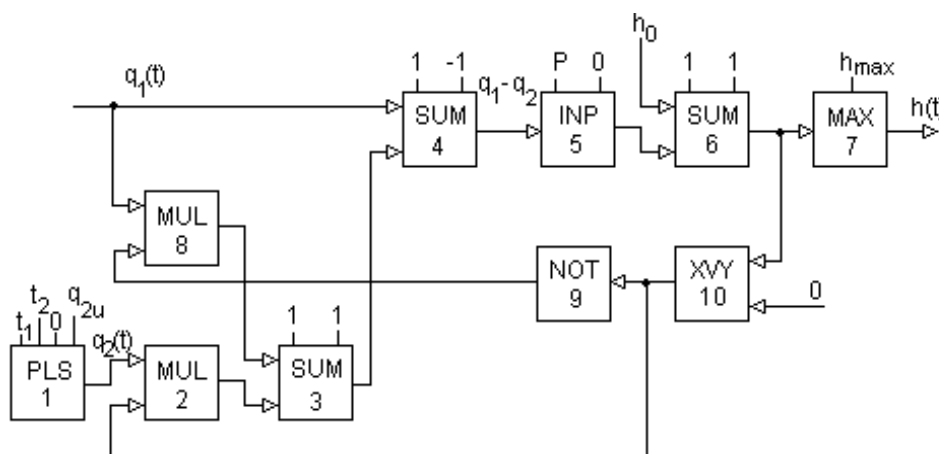
Obr. 5 : Simulačná schéma dvojpolohového regulátora

objemový odtok $q_2(t)$ výška hladiny v nádrži $h_2(t)$

Obr. 6 : Výsledky simulácie regulačného obvodu s dvojpolohovým regulátorom

Pre simuláciu boli zvolené tieto hodnoty :

$t_1 = 10 \text{ s}$; $t_2 = 80 \text{ s}$; $q_{2u} = 0,002 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$; $P = 0,5 \text{ m}$; $h_0 = 0,2 \text{ m}$; $h_{\max} = 0,3 \text{ m}$;
 $q_{1m} = 0,003 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$; $h = 0,02 \text{ m}$; $h_w = 0,27 \text{ m}$.



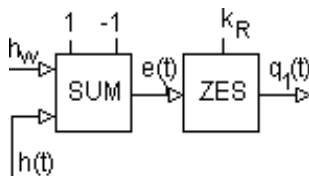
Obr. 7 : Simulačná shéma regulovanej sústavy – nádrž s odčerpávaním

Na základe výsledkov simulácie, viď **Obr. 6** môžeme urobiť tieto závery:

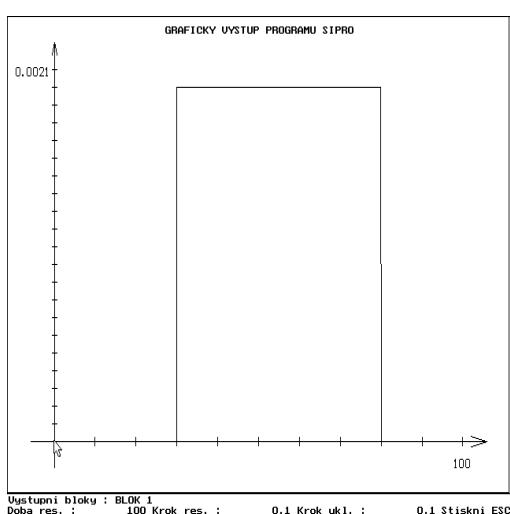
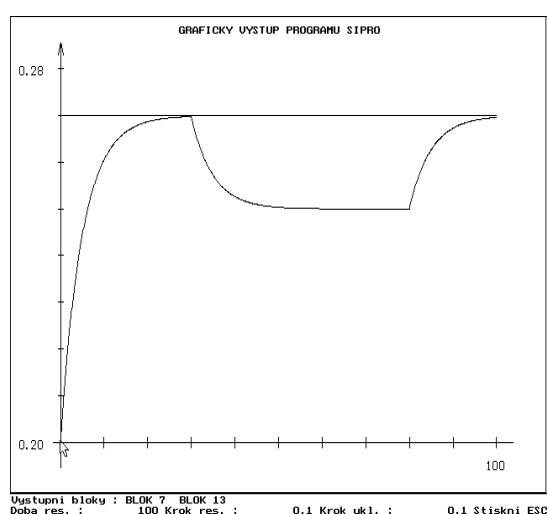
- požadovaná výška hladiny sa udržiava s presnosťou $\pm h/2$ a nie je závislá na veľkosti poruchy, tj. odčerpávaného množstva $q_2(t)$ [samozrejme musí byť splnená podmienka (3)];
- dvojpolohová regulácia je veľmi robustná.

b) Analógový regulátor typu P {súbor NAD_O_RP.SIP}

Simulačnú schému na **Obr. 7** doplníme o zapojenie s analógovým regulátorom na **Obr. 8**.



Obr. 8 : Simulačná schéma analógového regulátora

objemový odtok $q_2(t)$ výška hladiny v nádrži $h_2(t)$

Obr. 9 : Výsledky simulácie regulačného obvodu s analógovým regulátorom

Pre simuláciu boli zvolené tieto hodnoty :

$t_1 = 30 \text{ s}$; $t_2 = 80 \text{ s}$; $q_{2u} = 0,002 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$; $P = 0,5 \text{ m}$; $h_0 = 0,2 \text{ m}$; $h_{\max} = 0,3 \text{ m}$;
 $q_{1m} = 0,003 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$; $h_w = 0,27 \text{ m}$; $k_R = 0,1 \text{ m s}^{-1}$.

Na základe **Obr. 9** môžeme zhodnotiť analógovú reguláciu:

- analógová regulácia zaistí nulovú trvalú regulačnú odchýlku iba pre $q_2(t) = 0$;
- veľkosť trvalej regulačnej odchýlky závisí na veľkosti poruchy, tj. odčerpávaného množstva q_{2u} ;
- analógová regulácia v porovnaní s dvojpohovou reguláciou je menej robustná.

1.2 Regulácia nádrže s voľným odtokom

Na základe linearizovaného modelu nádrže s voľným odtokom z predchádzajúceho príkladu navrhne analógový regulátor typu P, ktorý zabezpečí požadovanú výšku hladiny h_w [m] s relatívne trvalou regulačnou odchýlkou $\kappa = 0,05$ (5%). Výsledok porovnáme na základe číslicovej simulácie s pôvodným nelineárnym modelom.

Obr. 10 : Zjednodušená schéma regulačného obvodu pre nádrž s voľným odtokom

Matematický model

Linearizovaný model nádrže s voľným odtokom ako regulovanej sústavy má tvar :

$$G_s(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k_1}{T_1 s + 1} , \quad (19a)$$

$$T_1 = \frac{2P\sqrt{h_u}}{a} , \quad (19b)$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{h_u}}{a} , \quad (19c)$$

$$h_{u1} = \frac{1}{a^2} q_{1u}^2 . \quad (19d)$$

Je zrejmé, že tento linearizovaný model platí pre pracovný bod (19d) a pre malé odchýlky od neho. Regulačný obvod s analógovým regulátorom typu P je na **Obr. 11**.

Obr. 11 : Bloková schéma regulačného obvodu

Prenos analógového regulátora typu P je veľmi jednoduchý

$$G_R(s) = \frac{\Delta Q_1(s)}{\Delta E(s)} = k_R , \quad (20)$$

kde k_R je zosilnenie regulátora [$m^2 s^{-1}$].

Na základe blokovej schémy regulačného obvodu môžeme ľahko určiť prenos riadenia

$$G_w(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta H_w(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} = \frac{\frac{k_R k_1}{1 + k_R k_1}}{\frac{T_1}{1 + k_R k_1} s + 1} \quad (21)$$

a obraz regulačnej odchýlky

$$\Delta E(s) = \Delta H_w(s) - G_w(s)\Delta H_w(s) = \frac{\frac{T_1}{1 + k_R k_1} s + \frac{1}{1 + k_R k_1}}{\frac{T_1}{1 + k_R k_1} s + 1} \Delta H_w(s) . \quad (22)$$

Na základe vety o konečnej hodnote môžeme zo vzťahu (23) určiť trvalú regulačnú odchýlku pre $\Delta h_w(t) = \Delta h_w = \text{konšt.}$

$$\Delta e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \Delta E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{\frac{T_1}{1 + k_R k_1} s + \frac{1}{1 + k_R k_1}}{\frac{T_1}{1 + k_R k_1} s + 1} \frac{\Delta h_w}{s} \right] = \frac{\Delta h_w}{1 + k_R k_1} . \quad (23)$$

Vidíme, že trvalá regulačná odchýlka $\Delta e(\infty)$ bude tým menšia, čím väčšie bude zosilnenie regulátora k_R . K rovnakému záveru sme mohli dôjsť na základe prenosu riadenia (21), pretože v jeho čitateli vystupuje výraz

$$\frac{k_R k_1}{1 + k_R k_1} , \quad (24)$$

ktorý je vždy menší ako 1, tzn.

$$\Delta h(\infty) < \Delta h_w . \quad (25)$$

Obr. 12 : Bloková schéma regulačných obvodov s nelineárnou a linearizovanou regulovanou sústavou

Určíme teraz zosilnenie regulátora k_R , ktoré zaistí trvalú regulačnú odchýlku $\varepsilon = 0,05$ (5%). Na základe vzťahu (23) môžeme napísať

$$\begin{aligned} \frac{\Delta e(\infty)}{\Delta h_w} = \varepsilon &\geq \frac{1}{1 + k_R k_1} , \\ k_R &\geq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon k_1} , \end{aligned} \quad (26)$$

resp. s využitím vzťahu (19c) dostaneme

$$k_R \geq \frac{a(1-\varepsilon)}{2\varepsilon\sqrt{h_u}}. \quad (27)$$

Pretože reálna regulovaná sústava je nelineárna, musíme použiť ostrú nerovnosť a pre $\varepsilon = 0,05$ dostaneme

$$k_R > \frac{9,5a}{\sqrt{h_u}}. \quad (28)$$

Simulačný model

Bloková schéma regulačných obvodov s nelineárnou a linearizovanou sústavou je na **Obr. 12**, z ktorého je zrejme, že s výhodou môžeme použiť väčšinu blokov zo simulačnej schémy??????. Výsledná simulačná schéma je na **Obr. 13** {súbor NAD_P_R.SIP}.

Simulačné výsledky na **Obr. 14** potvrdzujú oprávnenosť použitia pri návrhu regulačného obvodu linearizácie vo zvolenom pracovnom bode, určenom výškou hladiny h_u . Na základe vzťahu (28) je zrejme, že pre $\Delta h < 0$ pre zaistenie $\kappa = 0,05$ (5%) musíme zosilnenie regulátora v regulačnom obvode s nelineárnou regulovanou sústavou zvýšiť.

Ak zmeníme regulátory typu P na regulátory typu I v obidvoch regulačných obvodoch, trvalé regulačné odchýlky budú nulové.

Obr. 13 : Simulačná schéma regulačných obvodov s nelineárnou a linearizovanou regulovanou sústavou

Obr. 14 : Výsledky simulácie činnosti regulačných obvodov s nelineárnou a linearizovanou regulovanou sústavou

Pre simuláciu boli zvolené tieto hodnoty :

$t_1 = 10 \text{ s}$; $\Delta h_w = \pm 0,1 \text{ m}$; $P = 0,5 \text{ m}$; $h_u = 0,2 \text{ m}$; $k_R = 0,2 \text{ m s}^{-1}$; $a = 0,0044 \text{ m}^{5/2} \text{ s}^{-1}$.