

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií  
Katedra informatizácie a riadenia procesov

Ľubomír Dorčák, Ján Terpák, Františka Dorčáková

# TEÓRIA AUTOMATICKÉHO RIADENIA

Spojité lineárne systémy

2006

Teória automatického riadenia : Spojité lineárne systémy

Lektori : Prof. RNDr. Igor Podlubný, CSc., Ing. Ladislav Ivanecký, CSc.

Copyright © Doc.Ing. Ľubomír Dorčák, CSc., Doc.Ing. Ján Terpák, CSc., Ing. Františka Dorčáková, 2006

ISBN 80-8073-025-3

Za odbornú stránku tohto textu zodpovedajú autori. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

## OBSAH

1	Úvod	10
1.1	História	11
1.2	Účel automatizácie	15
1.3	Úvod do kybernetiky	16
1.4	Základné pojmy	17
1.4.1	Pojem a definícia riadenia, spätnej väzby, zákona nutnej variety a algoritmu	17
1.4.2	Pojem a definícia informácie	17
1.4.3	Informatika a jej definícia	18
1.4.4	Informatizácia	18
1.4.5	Informačné technológie	18
1.4.6	Informačné systémy	19
1.5	Systémy a ich modely	20
1.6	Princíp automatického riadenia	26
1.7	Príklady jednoduchého automatického riadenia	36
2	Lineárne spojité systémy	45
2.1	Vonkajší matematický popis spojitých lineárnych sústav	45
2.1.1	Laplaceova transformácia	45
2.1.2	Príklady sústav prvého rádu	48
2.1.3	Príklad sústavy druhého rádu	54
2.1.4	Spätná Laplaceova transformácia	55
2.1.5	Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou simulačného systému SIPRO	60
2.1.6	Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou simulačného systému MATLAB	62
2.1.7	Algebra prenosov	63
2.1.7.1	Sériové zapojenie členov	63
2.1.7.2	Paralelné zapojenie členov	63
2.1.7.3	Antiparalelné zapojenie členov	64
2.1.7.4	Transformácia štruktúrnych schém	66
2.1.7.5	Prenos riadenia a prenos poruchy	72
2.1.7.6	Otvorený regulačný obvod	74
2.2	Vnútny matematický popis spojitých lineárnych sústav	76
2.2.1	Koncept stavu	76
2.2.2	Analytické riešenie stavových rovníc	77
2.2.3	Riešenie stavových rovníc pre mnohorozmerný prípad	78
2.2.4	Numerické riešenie stavových rovníc	80
2.2.4.1	Eulerova metóda	80
2.2.4.2	Metóda Runge-Kutta	81
2.2.4.3	Metóda Runge-Kutta pre sústavu diferenciálnych rovníc	83
2.2.5	Kanonická transformácia	83
2.2.6	Riaditeľnosť a pozorovateľnosť spojitých systémov	84
2.2.6.1	Riaditeľnosť spojitých systémov	84
2.2.6.2	Pozorovateľnosť spojitých systémov	86
2.2.7	Kanonický rozklad	88
2.3	Vyšetrovanie dynamických vlastností sústav a ich prvkov	89
2.3.1	Regulárne signály používané k zisťovaniu dynamických vlastností	89

2.3.1.1	Jednotková skoková funkcia	89
2.3.1.2	Jednotková impulzná funkcia	90
2.3.1.3	Harmonický signál	90
2.3.2	Dynamické charakteristiky	91
2.3.2.1	Prechodová charakteristika	91
2.3.2.2	Impulzná charakteristika	93
2.3.2.3	Frekvenčná charakteristika	94
2.4	Regulované systavy a regulátory	111
2.4.1	Základné typy a vlastnosti regulovaných sústav	111
2.4.1.1	Sústava s oneskorením nultého rádu	111
2.4.1.2	Sústava s oneskorením nultého rádu s dopravným oneskorením	113
2.4.1.3	Statická sústava s oneskorením prvého rádu	115
2.4.1.4	Astatická sústava s oneskorením prvého rádu	117
2.4.1.5	Sústava s oneskorením prvého rádu s dopravným oneskorením	119
2.4.1.6	Sústava s oneskorením druhého rádu	122
2.4.2	Metódy identifikácie regulovaných sústav	126
2.4.3	Stabilita spojitých lineárnych sústav	145
2.4.3.1	Stabilita regulačných obvodov podľa koreňov charakteristickej rovnice	145
2.4.3.2	Hurwitzovo kritérium stability	147
2.4.3.3	Frekvenčné kritériá stability	148
2.4.3.4	Analýza stability spojitých systémov v stavovom priestore	150
2.4.3.5	Posúdenie stability sústav druhého rádu v stavovom priestore	153
2.4.4	Syntéza regulátorov	158
2.4.4.1	Kritériá kvality regulačného pochodu	158
2.4.4.2	Základné typy a vlastnosti ústredných regulačných členov	160
2.4.4.3	Vplyv regulátora na vlastnosti regulačného obvodu	176
2.4.4.4	Použitie regulátorov	185
2.4.4.5	Určenie konštánt regulátora metódou dominantných koreňov	186
2.4.4.6	Určenie konštánt regulátora Ziegler-Nicholsovou metódou	191
2.4.4.7	Modelovanie spojitého regulačného obvodu	194
3	Literatúra	197
4	PRÍLOHA A	199
5	PRÍLOHA B	201
6	PRÍLOHA C	205

## ZOZNAM OBRÁZKOV

Obr. 1 : Väzby objektu riadenia a riadiaceho zariadenia	10
Obr. 2 : Regulátor prísunu zrna v starovekých mlynoch	11
Obr. 3 : Wattov regulátor otáčok parného stroja	12
Obr. 4 : Hierarchia počítačových riadiacich systémov	14
Obr. 5 : Ručná regulácia teploty pece	15
Obr. 6 : Automatická regulácia teploty pece	15
Obr. 7 : Kauzálna reakcia	20
Obr. 8 : Blokové znázornenie toku signálov	20
Obr. 9 : Príklad statického (a) a dynamického systému (b)	22
Obr. 10 : Grafické zobrazenie systému	23
Obr. 11 : Klasifikácia dynamických systémov a ich modelov	25
Obr. 12 : Principiálna bloková schéma spätnoväzobného riadenia	26
Obr. 13 : Základné typy signálov	27
Obr. 14 : Podrobnejšia klasifikácia typov signálov	28
Obr. 15 : Bloková schéma ovládania	29
Obr. 16 : Bloková schéma kompenzačného riadenia	29
Obr. 17 : Bloková schéma regulácie	30
Obr. 18 : Bloková schéma automatického riadenia	31
Obr. 19 : Klasifikácia ASR	33
Obr. 20 : Pyramídová štruktúra úrovni riadenia	34
Obr. 21 : Distribuované a hierarchické systémy	35
Obr. 22 : Schéma regulácie výšky hladiny	36
Obr. 23 : Regulácia teploty v priemyselných peciach	37
Obr. 24 : Regulácia teploty vody v prietokových ohrievačoch	37
Obr. 25 : Regulácia tlaku v zásobníkoch	38
Obr. 26 : Programová regulácia teploty	38
Obr. 27 : Pomerová regulácia	39
Obr. 28 : Regulácia vykurovania ohrievača vysokopecného vetra	39
Obr. 29 : Automatizácia vysokopecného pochodu	40
Obr. 30 : Riadenie laboratórnej ohrievacej pece počítačom	41
Obr. 31 : Schéma merania a regulácie jednotlivého horizontálneho banského diela	42
Obr. 32 : Trhová regulácia ceny produktov	43
Obr. 33 : Sval ako systém	43
Obr. 34 : Princíp riadenia ruky	44
Obr. 35 : Popis systému pomocou obrazového prenosu	47
Obr. 36 : Jednkapacitná sústava z odporu a kondenzátora	48
Obr. 37 : Grafické znázornenie výstupu jednkapacitnej sústavy	49
Obr. 38 : Hydraulická sústava	51
Obr. 39 : Linearizácia v okolí typického pracovného bodu	52
Obr. 40 : Plášťový výmenník tepla	53
Obr. 41 : Dvojkapacitná elektronická sústava	55
Obr. 42 : Simulačná schéma pre riešenie diferenciálnej rovnice v SIPRO.	60
Obr. 43 : Riešenie diferenciálnej rovnice v SIPRO metódou prenosových funkcií.	61
Obr. 44 : Príkazový súbor pre riešenie odozvy systému pomocou MATLABu	62
Obr. 45 : Grafické zobrazenie odozvy systému	62
Obr. 46 : Sériové zapojenie členov	63
Obr. 47 : Paralelné zapojenie členov	64
Obr. 48 : Antiparalelné zapojenie členov	65
Obr. 49 : Príklad na aplikáciu algebry prenosov	66
Obr. 50 : Spojovacia linka	67
Obr. 51 : Zmena poradia sčítavania alebo počtu sčítacích miest	68
Obr. 52 : Zmena poradia sčítacieho miesta a rozvetvenia signálu	68
Obr. 53 : Zmena poradia sčítacieho miesta a bloku pre dva signály	69
Obr. 54 : Prenesenie rozvetvovacieho miesta pred blok	69
Obr. 55 : Prenesenie rozvetvovacieho miesta za blok	70
Obr. 56 : Zmena paralelného zapojenia blokov	70
Obr. 57 : Spätnoväzobný regulačný obvod s dvoma vstupmi	73
Obr. 58 : Otvorený regulačný obvod	74

Obr. 59 : Proces miešania	77
Obr. 60 : Kanonický rozklad	88
Obr. 61 : Jednotková skoková funkcia	89
Obr. 62 : Posunutá jednotková skoková funkcia	89
Obr. 63 : Jednotková impulzná funkcia	90
Obr. 64 : Harmonický signál	91
Obr. 65 : Prechodová charakteristika periodického deja	92
Obr. 66 : Prechodová charakteristika aperiodického deja	92
Obr. 67 : Nyquistova frekvenčná charakteristika	96
Obr. 68 : Napäťové, prúdové zosilnenie a zisk v lineárnych súradniciach	99
Obr. 69 : Napäťové, prúdové zosilnenie a zisk v logaritmických súradniciach	99
Obr. 70 : Aproximácia amplitúdovej charakteristiky asymptotami	102
Obr. 71 : Chyby aproximácie amplitúdovej charakteristiky asymptotami	103
Obr. 72 : Príkazový súbor pre výpočet Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky	105
Obr. 73 : Graf Nyquistovej komplexnej frekvenčnej charakteristiky	106
Obr. 74 : Príkazový súbor pre výpočet logaritmickkej frekvenčnej charakteristiky	108
Obr. 75 : Graf amplitúdovej a fázovej charakteristiky	108
Obr. 76 : Príkazový súbor pre Nicholsovej charakteristiky	108
Obr. 77 : Nicholsova charakteristika	109
Obr. 78 : Prechodová charakteristika sústavy nultého rádu	112
Obr. 79 : Frekvenčné charakteristiky sústavy nultého rádu	113
Obr. 80 : Prechodová charakteristika sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením	114
Obr. 81 : Frekvenčná charakteristika sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením	114
Obr. 82 : Príklad sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením	115
Obr. 83 : Prechodová charakteristika sústavy prvého rádu	116
Obr. 84 : Nyquistova frekvenčná charakteristika sústavy prvého rádu	116
Obr. 85 : Logaritmická frekvenčná charakteristika sústavy prvého rádu	117
Obr. 86 : Prechodová charakteristika astatickej sústavy prvého rádu	118
Obr. 87 : Nyquistova frekvenčná charakteristika astatickej sústavy prvého rádu	118
Obr. 88 : Logaritmická frekvenčná charakteristika astatickej sústavy prvého rádu	119
Obr. 89 : Prechodová charakteristika sústavy prvého rádu s dopravným oneskorením	120
Obr. 90 : Nyquistova fr. charakteristika sústavy 1. rádu s dopravným oneskorením	120
Obr. 91 : Logaritmická fr. charakteristika sústavy 1. rádu s dopravným oneskorením	121
Obr. 92 : Príklad sústavy prvého rádu s dopravným oneskorením	121
Obr. 93 : Prechodová charakteristika kmitavej sústavy druhého rádu	123
Obr. 94 : Nyquistova frekvenčná charakteristika kmitavej sústavy druhého rádu	124
Obr. 95 : Nyquistova frekvenčná charakteristika nekmitavej sústavy druhého rádu	125
Obr. 96 : Logaritmická frekvenčná charakteristika nekmitavej sústavy druhého rádu	125
Obr. 97 : Určenie zosilnenia sústavy nultého rádu	127
Obr. 98 : Určenie zosilnenia a časových konštánt sústavy prvého rádu	128
Obr. 99 : Určenie doby polčasu sústavy prvého rádu	129
Obr. 100 : Určenie časových konštánt sústavy druhého rádu	130
Obr. 101 : Bezrozmerné hodnoty prechodových charakteristík sústav druhého rádu	133
Obr. 102 : Určenie dopravného oneskorenia	134
Obr. 103 : Závislosti pre $k_1$ a $k_2$ pre aproximáciu sústavou druhého rádu	136
Obr. 104 : Príklad priebehu vstupnej a výstupnej veličiny identifikovanej sústavy	138
Obr. 105 : Geometrická interpretácia interálov pri identifikácii	139
Obr. 106 : Nameraná prechodová charakteristika identifikovanej sústavy	141
Obr. 107 : Typy koreňov a prechodových dejov	146
Obr. 108 : Spätnoväzobný regulačný obvod s dvoma vstupmi a jedným výstupom	148
Obr. 109 : Spätnoväzobný regulačný obvod s prerušenou spätnou väzbou	148
Obr. 110 : Posudzovanie stability podľa Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky	149
Obr. 111 : Fázové trajektórie sústavy druhého rádu - a	156
Obr. 112 : Fázové trajektórie sústavy druhého rádu - b	157
Obr. 113 : Regulačné plochy	159
Obr. 114 : Lokálne kritériá kvality	159
Obr. 115 : Priamy regulátor výšky hladiny s prepadom	162
Obr. 116 : Regulátor napätia (stabilizátor) so stabilizačnou diódou	162
Obr. 117 : Ideálny invertujúci jednosmerný zosilňovač	163
Obr. 118 : Základné zapojenie proporcionálneho regulátora	164

Obr. 119 : Základné zapojenie integračného regulátora	164
Obr. 120 : Základné zapojenie derivačného regulátora	165
Obr. 121 : Prechodová charakteristika skutočného derivačného regulátora	165
Obr. 122 : Paralelné zapojenie základných typov regulátorov	166
Obr. 123 : Frekvenčné charakteristiky PI regulátora	167
Obr. 124 : Prechodová charakteristika PI regulátora	167
Obr. 125 : Zapojenie PI regulátora	168
Obr. 126 : Korekčný člen pre zjednodušený PI regulátor	168
Obr. 127 : Logaritmicke frekvenčné charakteristiky korekčného člena a PI regulátora	169
Obr. 128 : Prechodová charakteristika korekčného člena PI	169
Obr. 129 : Spätnoväzobný PI regulátor	170
Obr. 130 : Charakteristiky ideálneho a reálneho <i>P</i> regulátora	171
Obr. 131 : Charakteristiky ideálneho a reálneho <i>I</i> regulátora	172
Obr. 132 : Charakteristiky ideálneho a reálneho <i>PI</i> regulátora	173
Obr. 133 : Charakteristiky ideálneho a reálneho <i>PD</i> regulátora	174
Obr. 134 : Charakteristiky ideálneho a reálneho <i>PID</i> regulátora	175
Obr. 135 : Vplyv proporcionálneho regulátora na výstup regulovanej sústavy	178
Obr. 136 : Frekvenčné charakteristiky sústavy a regulačného obvodu s <i>P</i> regulátorom	179
Obr. 137 : Prechodové a frekvenčné charakteristiky sústavy 2. rádu s <i>P</i> regulátorom	180
Obr. 138 : Prechodové a frekvenčné charakteristiky sústavy 1. rádu a s <i>I</i> regulátorom	182
Obr. 139 : Vplyv derivačného regulátora na sústavu prvého a druhého rádu	184
Obr. 140 : Dominantné korene, miera stability a tlmenia	187
Obr. 141 : Celková bloková schéma regulátora v regulačnom obvode	193
Obr. 142 : Simulačná bloková schéma regulačného obvodu	195

## ZOZNAM TABULIEK

Tab. 1 : Prevod zosilnenia na zisk v decibeloch	99
Tab. 2 : Dáta pre aproximáciu sústav vyššieho rádu	134
Tab. 4 : Optimálne nastavenie parametrov regulátora	193
Tab. 4 : Tabuľka Laplaceových obrazov vybraných funkcií	200
Tab. 5 : Popis blokov simulačného systému SIPRO - a	202
Tab. 6 : Popis blokov simulačného systému SIPRO - b	203
Tab. 7 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - a	206
Tab. 8 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - b	207
Tab. 9 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - c	208
Tab. 11 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - d	209
Tab. 11 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - e	210
Tab. 12 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - f	211



## Predslov

Jedným z rozhodujúcich faktorov, ktoré pomáhajú zvyšovať konkurenčnú schopnosť firiem je jednak modernizácia výrobných zariadení a tiež aj racionalizácia ich vlastnej činnosti s nadväznosťou na automatizáciu všetkých výrobných a informačných systémov. Je nutné zdôrazniť, že aj najkvalitnejšie stroje a technologické linky nemôžu byť úspešné, ak nebudú automatizované a nebudú vybavené kvalitným riadením a inteligenciou. Z toho dôvodu je nutná znalosť ako systémových princípov zavádzania automatizačnej techniky, súčiastkovej základne, informačných systémov, tak aj znalosť základov teórie automatického riadenia a zásad tvorby automatických výrobných systémov. K ovládaniu automatizačnej techniky a k jej efektívnemu zavádzaniu sú potrební kvalifikovaní odborníci, ktorých je v súčasnosti nedostatok ako u nás tak aj v zahraničí. Teda znalosť automatizačnej techniky je strategickou kvalifikáciou a veľkou konkurenčnou výhodou pre absolventov, ktorí majú dobré predpoklady uplatnenia sa na trhu práce, lebo o uvedené špecializácie bude stále väčší záujem.

Tieto skriptá z predmetu *Teória automatického riadenia* sú určené najmä pre poslucháčov štvrtého ročníka vysokoškolského štúdia odboru *Riadenie procesov získavania a spracovania surovín, smer Technologický management* na Fakulte BERG Technickej Univerzity v Košiciach, ale aj študentom doktorandského štúdia a iným záujemcom o problematiku teórie automatického riadenia. Poznatky získané z týchto skriptov vytvárajú predpoklady pre úspešné zvládnutie riešenia danej problematiky ako aj pre jej podrobnejšie štúdium a výskum, lebo umožňujú orientovať sa v odbornej problematike teórie automatického riadenia. Skriptá vznikli jednak na základe poznatkov autorov z výučby predmetov *Teória automatického riadenia* a *Základy technickej kybernetiky*, na základe odbornej literatúry zaoberajúcej sa podobnou problematikou, ako aj na základe vlastných skúseností a výsledkov výskumnej činnosti autorov.

Cieľom týchto skriptov je poskytnúť poslucháčom Fakulty BERG učebný text z predmetu "*Teória automatického riadenia : Lineárne spojené systémy*" v rozsahu predpísanom učebnými osnovami, a teda text skriptov sa kryje s prednášanou látkou z uvedeného predmetu. Skriptá nadväzujú na poznatky získané v predmetoch *Matematika, Kybernetika, Matematické základy automatizácie, Modelovanie a simulácia procesov, Teória systémov, Identifikácia systémov a Riadenie technologických procesov*. Obsah skriptov sa týka teórie lineárnych spojených systémov. Je rozdelený do šiestich kapitol vrátane zoznamu odbornej literatúry a príloh.

Prvá, úvodná, kapitola najprv stručne popisuje historické súvislosti vývoja automatizácie od najjednoduchších automatických zariadení až po zložité ako aj na súvislosti s novo vzniknutým vedným odborom - kybernetikou. Ďalej je tu popísaný účel automatizácie pre súčasnosť aj budúcnosť, stručne sú vysvetlené základné pojmy, princíp automatizácie a uvedené sú aj vybrané jednoduché príklady automatického riadenia.

Druhá kapitola je najrozsiahlejšia a venuje sa teoretickým základom popisu, analýzy a metódam syntézy spojených lineárnych dynamických systémov. Väčšia pozornosť je venovaná vonkajšiemu popisu a je urobený úvod aj do vnútorného popisu. Ďalšia časť je venovaná vyšetrovaniu dynamických vlastností spojených lineárnych systémov a vyšetrovaniu ich stability. Záver tejto kapitoly sa zaoberá kritériami kvality regulačných obvodov a metódami ich návrhu.

Súčasťou skriptov je aj rozsiahly zoznam doplnkovej odbornej literatúry, ktorý dáva čitateľovi ďalšie možnosti prehĺbenia svojich poznatkov z teórie automatického riadenia.

Tieto skriptá boli vypracované aj s čiastočnou podporou projektov VEGA 1/2179/05, 1/3132/06, 1/2160/05 a 1/2167/05 Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva SR a Slovenskej akadémie vied a zahŕňajú niektoré výsledky získané v rámci riešenia tohoto projektu.

Je nám milou povinnosťou vysloviť poďakovanie obidvom lektorom, prof. RNDr. Igorovi Podlubnému, CSc., a Ing. Ladislavovi Ivanekému, CSc., za pozorné prečítanie rukopisu a celý rad podnetných pripomienok, ktoré prispeli k zlepšeniu obsahovej stránky, čitateľnosti a formálnej úpravy predkladaných skriptov. Za pomoc pri spracovaní časti textu a obrázkov chcem poďakovať aj svojim študentom z FBERG.

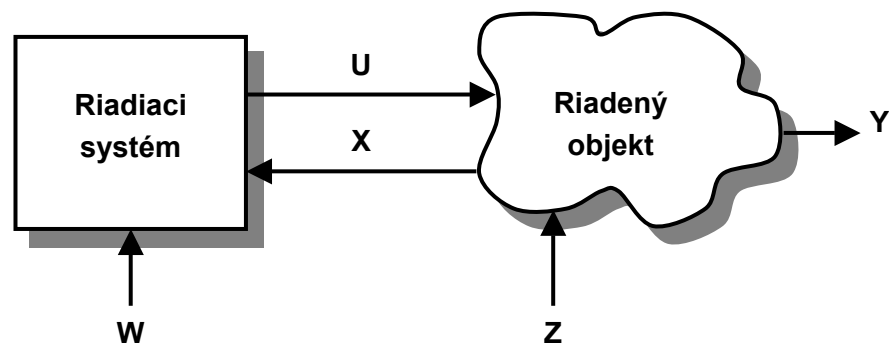
# 1 Úvod

Zjednodušene môžeme povedať, že všetko okolo nás vnímame buď ako reálne existujúce veci alebo ako deje prebiehajúce v nich a v ich okolí. V teórii systémov označujeme reálne existujúcu vec ako *objekt* a v teórii procesov prebiehajúce deje v objektoch a v ich okolí označujeme ako *procesy*, ktoré predstavujú vnútorné vzťahy v objekte.

Pod objektom môžeme pre naše účely teda chápať napríklad zariadenie na výrobu určitých polotovarov alebo výrobkov transformáciou vstupných materiálov na výstupné, k čomu je nutná energia. Môžeme ním ale chápať napríklad aj žehličku na žehlenie, rúru na pečenie a podobne. Objekty skúmania budeme ďalej volať a definovať ako systémy.

Procesy teda predstavujú vnútorné vzťahy v systéme, t.j. spôsob transformácie vstupov do systému na výstupy zo systému. Iným spôsobom povedané, ide o transformáciu substancie. Činnosť je výsledok procesu, t.j. proces predstavuje realizáciu činností. Substancia je ľubovoľná realita, ktorá je predmetom transformácie. Môže to byť voda, plyn, ruda, ropa, uhlie, elektrická energia, železo, oceľ alebo aj informácia. Vlastnosti substancie môžeme rozdeliť na také vlastnosti, ktoré sú závislé na množstve substancie - extenzívne vlastnosti (napr. hmotnosť, objem, látkové množstvo) a na vlastnosti nezávislé na množstve - intenzívne vlastnosti (napr. hustota, teplota, viskozita). Procesy je možné deliť podľa rôznych hľadísk [1], [2].

Pri výrobe polotovarov alebo výrobkov v určitých technologických zariadeniach, teda pri vedomej a usmerňovanej transformácii substancí, sú v určitej väzbe a vzájomnej interakcii dva základné objekty, a to *riadený objekt* (*objekt riadenia*) a *riadiaci objekt* (riadiaci systém) (Obr. 1). V riadenom objekte dochádza k transformácii surovín na polotovary alebo výrobky. V riadiacom systéme dochádza zasa k transformácii informácií. Spôsoby väzieb oboch objektov môžu byť rôzne.



Obr. 1 : Väzby objektu riadenia a riadiaceho zariadenia

Dopredu známe a popísané deje, ktoré prebiehajú v riadenom objekte, je potrebné ovplyvňovať tak, aby prebiehali podľa našich požiadaviek. Je nutné reagovať na možné podnety, ktoré prichádzajú o dejoch ako vo vlastnom zariadení, tak aj z okolia. Na základe informácií o stave riadeného objektu **X** alebo tiež o jeho výstupných veličinách **Y** pôsobí riadiaci objekt (riadiaci systém, RS) na riadený objekt výkonnými povelmi **U** tak, aby boli dosiahnuté požadované činnosti riadeného objektu popísané veličinou **Y**. Okrem vnútorných stavov **X** a výkonných povelov **U** sa v takejto sústave vyskytujú aj vonkajšie povely **W** a poruchy **Z**. Vonkajšie povely **W** sú vlastne požadované hodnoty pre výstupy **Y**. Riadiaci systém zisťuje svojimi vstupnými členmi vlastnosti riadeného deja a výstupnými členmi tieto deje ovplyvňuje a riadi. Vstupnými členmi môžu byť rôzne snímače a čidlá (teploty, tlaku, polohy apod.), prvky pre ovládanie (prepínače, tlačidlá) a iné. Výstupnými členmi môžu byť stykače, motory, kontrolky, žiarovky, vyhrievacie telesá a iné zariadenia. K obidvom objektom patria teda aj vstupné a výstupné prvky, spojovacie cesty a štandardné rozhrania [64], [65]. Oba objekty a ďalšie prvky môžeme samozrejme opäť chápať ako jeden objekt, skladajúci sa z podobjektov, s procesmi a tiež s väzbami ako vo vnútri objektu tak aj s jeho okolím. Základné prebiehajúce procesy sú *výkonné* a *riadiace*.

*Výkonné procesy* uskutočňujú výkonnú činnosť. V technických systémoch sú to vlastné hmotné transformácie. Na ich uskutočnenie je potrebná energia. *Technologický proces* je výkonný proces, pri ktorom sa uskutočňuje spracovanie, teda transformácia vstupných materiálov v danom technologickom zariadení. *Vo výrobnom procese* sa uskutočňuje výroba výrobkov, ktorá pozostáva z určitého počtu a aj zodpovedajúcej následnosti príslušných technologických a manipulačných procesov.

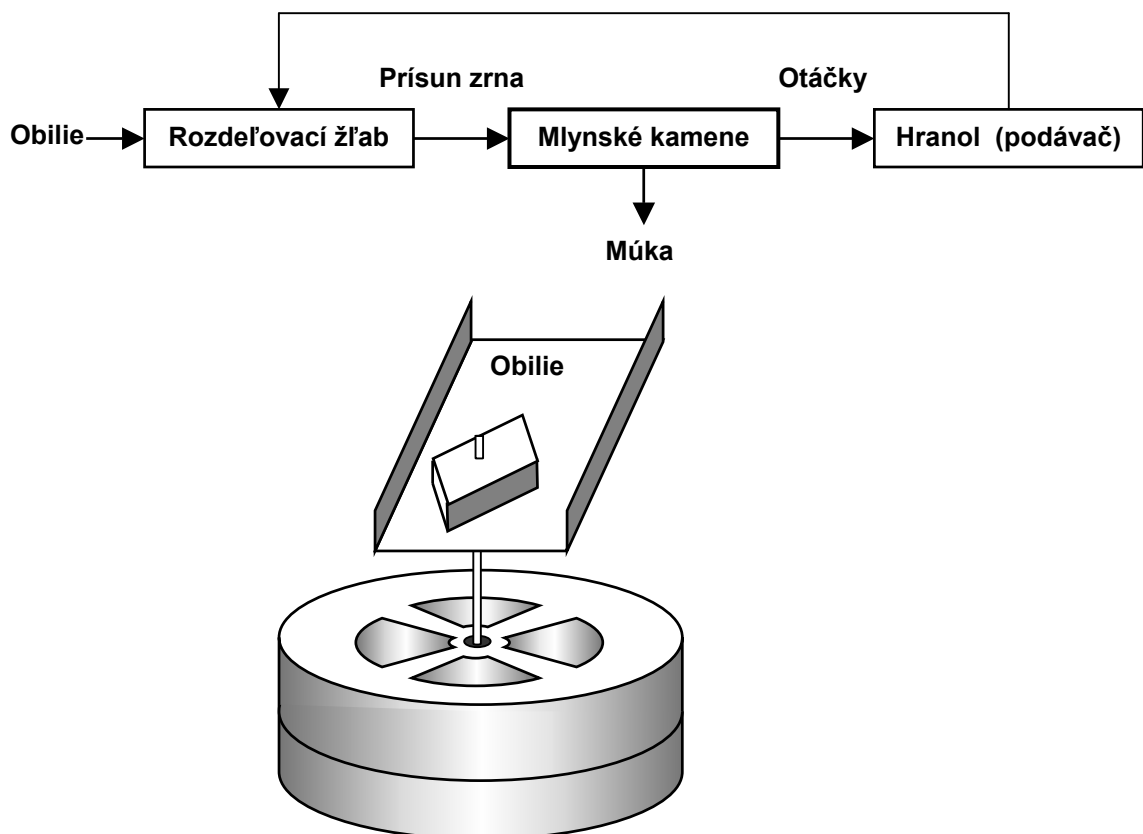
Riadiace procesy zabezpečujú riadenie, teda uskutočňovanie výkonných procesov. Nazývajú sa tiež *kybernetické procesy*, pretože sa pri nich uskutočňuje transformácia informácií. V riadacom objekte sa teda uskutočňujú riadiace činnosti.

## 1.1 História

Už v staroveku si ľudia uvedomovali, že schopnosť človeka samostatne a tvorivým spôsobom jednať a riadiť mnohé deje reálneho sveta je v prírode mimoriadnym javom. Preto obdivovali všetko, čo sa im podarilo umelo vytvoriť a čo malo nejaké automatické vlastnosti. V staroveku a potom aj neskôr v stredoveku boli takéto výtvary považované za kúzla a zázraky, neskôr za hračky [3].

K najznámejším starovekým umelým zázrakom môžeme radiť napríklad to, ako v slávnom meste Alexandrii už 200 rokov pred našim letopočtom sa veľké, ťažké, bronzové vráta chrámu sami otvárali, kovové vtáky spievali a kovové sochy postrekovali veriacich posvätnou vodou. Prítom všetky tieto zázraky, nad ktorými ľudia žasli, spôsobovalo dômyselné využitie pary a teplého vzduchu v zariadení, ktoré skonštruoval alexandrijský učenec Hérón [3]. Hérón tu vlastne prvýkrát využil princíp teplovzdušného motora. Svoje zariadenie popísal v knihe "Pneumatika", ktorá sa zachovala dodnes.

Práve preto, že všetko automatické bolo zastreté rúskom tajomstva a kúziel, ľudia si takmer vôbec neuvedomovali skutočnosť, že okolo seba vidia rôzne bežne používané mechanizmy, ktoré prítom tiež vykazovali automatické chovanie. Napríklad už od starodávna používali mlynári na vodných a veterných mlynosch jednoduché zariadenie, ktoré regulovalo prísun zŕn medzi mlynské kamene v závislosti od ich otáčok. Náčrt zariadenia je na Obr. 2.



Obr. 2 : Regulátor prísunu zrna v starovekých mlynoch

Ak bolo množstvo zrna dodávané na mlynské kamene veľmi veľké, otáčky kolies klesali. Hranol podávacieho zariadenia potom podával na mlynské kamene menej zrna, čo zmenšilo trenie kolies a umožnilo vzrast ich otáčok. Takéto zariadenie sa vyskytovalo aj v inej modifikácii, ktorému sa v mlynoch hovorilo samotras. K hriadeľu mlynskeho kameňa sa pripevnila objímka tak, že sa pri otáčaní dotýkala svojím okrajom dreveného žľabu, po ktorom padalo zrno na mlynské kamene. Čím rýchlejšie sa hriadeľ

otáčal, tým častejšie objímka narážala na žľab, otriasala ním, a tým viac zrna z neho padalo medzi mlynské kamene a naopak. V hornej časti Obr. 2 je nakreslená bloková schéma, ktorá zachytáva princíp činnosti tohto zariadenia. Vidíme tu typickú spätnoväzobnú slučku, ktorá je tak charakteristická pre kybernetické systémy, ako ich uvidíme v ďalších kapitolách.

Bohužiaľ práve všednosť a praktickosť týchto zariadení ich zbavovala príslovečného mýtu automatickej výnimočnosti.

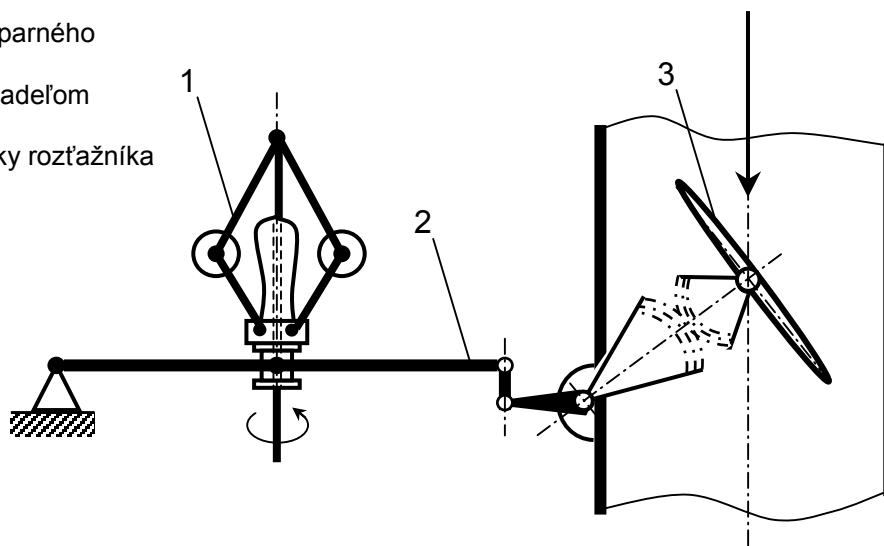
V stredoveku sa stali obdivovanými hlavne mechanické hračky a ich tvorcami boli hlavne hodinári. Hodinový stroj bol v stredoveku predstaviteľom vrcholnej remeselnej zručnosti, mechanickej zdatnosti a zložitosti, pričom obsahoval rad dômyselných regulátorov. Ich konštruktéri často vytvorili zariadenia nielen na ukazovanie presného času, ale ukazovali aj kalendárne dáta, postavenie planét na oblohe apod. Príkladom je aj Staromestský orloj majstra Jana Hanuše z Rúže (okolo roku 1490). Vo veľkých kláštoroch a katedrálach boli zasa inštalované rôzne zvonkohry. Hodinárski majstri zostrojovali aj rôzne iné mechanické hračky, automatické divadlo, šachové automaty apod.

Potreby a požiadavky kapitalizmu obrátili pozornosť vedcov, vynálezcov a konštruktérov k návrhu takých automatov, ktoré umožňovali zvýšiť produktivitu práce, čím prinášali väčšie zisky majiteľom modernizovaných tovární.

Klasickým príkladom, ako automatizácia pomohla zásadným spôsobom zvýšiť možnosti parného stroja, je vynález odstrediveho regulátora otáčok, ktorý na parný stroj aplikoval anglický mechanik James Watt okolo roku 1775. Výkon jeho parného stroja bol v porovnaní s vtedajšími parnými strojmi Saveryho a Newcomena zvýšený nielen dvojčinným usporiadaním, ktoré umožňovalo privádzať paru striedavo na obidve strany piesta, čo umožňovalo zdvojnásobiť výkon parného stroja, ale najmä odstránením ručného ovládania rozvodu pary a samočinnú reguláciu otáčok (Obr. 3).

Wattov regulátor otáčok parného stroja z r. 1784.

- 1-rozťažník spojený s hriadeľom stroja,
- 2-prevod výchylky objímky rozťažníka na regulačný orgán,
- 3-klapka v prívide pary.



Obr. 3 : Wattov regulátor otáčok parného stroja

Ak parný stroj J. Watta ukázal význam automatizácie ovládania a automatickej regulácie, potom Jacquardov tkáčsky stav ukázal význam programového riadenia u výrobných strojov. Joseph Jacquard sa rozhodol riadiť tkanie a tvorbu vzoru látky v tkáčskom stroji okolo roku 1800 pásom zloženom z jednotlivých článkov tuhého kartónu. V týchto článkoch boli otvory a prechádzali čítacím zariadením, ktoré sa skladalo z hmatadiel prepojených na páky, ktoré riadili rozdelenie vlákien rôznych farieb tkáčskeho stavu a ďalšie iné funkcie. Daný "program" bolo možné pomerne jednoducho vymeniť za iný. Kartónové články pásu boli predzvesťou diernych štítkov a diernych pásov, ktoré slúžili na začiatku dvadsiateho storočia k mechanizácii kancelárskych prác a neskôr v sedemdesiatych rokoch ako prostriedok pre vstup programov a dát do počítačov druhej a tretej generácie, alebo pre vstup programov do numericky riadených obrábacích strojov.

Prvá priemyselná revolúcia predstavovala veľkú technologickú a sociálno-ekonomickú zmenu, vyvolanú a charakterizovanú hromadným zavádzaním strojov do výroby. Ručná práca, ktorá bola taká typická pre manufaktúry, bola nahradená prácou stále sa zdokonaľujúcich strojov, ktoré dokázali vyrobiť niekoľkonásobne väčšie množstvo výrobkov v porovnaní s ručnou remeselníckou výrobou. Modernizácia tovární však na druhej strane pripravovala robotníkov o pracovné príležitosti a o mzdu, ktorú potrebovali na obživu. Robotníci mylne hľadali príčinu svojej biedy v strojoch a v novodobých automatoch.

Napriek všetkým problémom sa automatizácia rozširovala vo všetkých oblastiach spoločnosti a rozhodujúcim spôsobom spoločnosť aj ovplyvňovala. Symbolom automatizácie sa v tej dobe stávali centralizované veľiny rôznych automatizovaných sústav riadenia vodných a parných elektrární, automatizovaných výrobných liniek, radiacích veží letísk apod.

Popri negatívnych dôsledkoch druhej svetovej vojny môžeme za pozitívum označiť urýchlenie vynálezu elektronického počítača. Bezprostredným predchodcom modernej výpočtovej techniky bol projekt anglického matematika Charlesa Babbagea, ktorý v prvej polovici 19. storočia rozvíjal myšlienku automatického počítacieho stroja riadeného pomocou programu. Na jeho myšlienky nadviazali vedci v 40. rokoch 20. storočia. Hlavným motívom bolo zvýšenie požiadaviek na výrobu a na automatizáciu aj zložitých radiacích funkcií. Takéto požiadavky boli postavené aj pred konštruktérov zložitých moderných zbraňových systémov. Riešenie umožnila nastupujúca elektronizácia radiacích systémov. To bolo rozhodujúcim predpokladom, pretože všetky doterajšie pokusy mnohých veľkých učencov o automatizáciu výpočtov neboli úspešné hlavne kvôli absencii spoľahlivých a malých technických prvkov.

V Nemecku boli predvojnové práce na reléovom počítači zahájené už v roku 1934, kedy Konrad Zuse začal vyvíjať samočinný počítač, ktorý uviedol do chodu v roku 1938. Stroj označovaný Z1, ktorý bol založený na relátkach, bol pomalý a nespoľahlivý. V roku 1941 bol vytvorený reléový počítač s pamäťou pre 64 tridsaťdva bitových čísiel, zobrazením v pohyblivej radovej čiarke a čítaním inštrukcií z diernej pásky. V roku 1943 boli ďalšie práce na už elektrónkovom počítači pre veľkú finančnú náročnosť zastavené, a tak v nich konštruktér Konrad Zuse pokračoval až po skončení druhej svetovej vojny (počítače Z3).

Inak to bolo v Spojených štátoch amerických, kde v roku 1939 matematik J.V. Atanasoff a C.E. Berry dokončili prototyp centrálnej jednotky počítača, ktorý však pre ťažkosti s perifériami v roku 1942 zanechali. V roku 1939 Howard Aiken vyvíjal v spolupráci s IBM počítač Harvard Mark I, ktorý bol dokončený v roku 1944. Bol dlhý 15 metrov, vysoký 2,4 metra a obsahoval 3 300 relátok. Pracoval s číslami na 23 desiatinných miest, vstup mal z 24 stopovej diernej pásky. Sčítanie trvalo 0,3 s, násobenie 3 až 5 s. Mark I počas stovky hodín vypočítal skladbu uránovej nálože, ktorá bola odpálená 16.6.1945 v púšti Alamogordo. Na Hardwardskej univerzite potom tento počítač pracoval ešte pätnásť rokov. Po vojne Aiken navrhol počítač Mark II s 13 000 relátkami.

V roku 1943 obdržali J.P. Eckert, J.W. Mauchly a H.H. Goldstine z Pensylvánskej univerzity vládnú dotáciu 400 000 dolárov na vývoj elektronického zariadenia pre výpočet delostreleckých tabuliek. Počítač bol označený skratkou ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) a bol uvedený do prevádzky 16.2.1946. Obsahoval 17 468 elektróniek a 7 200 kryštálových diód, zaberol plochu 167 štvorcových metrov, mal príkon 174 kW a vážil cez 30 ton. Sčítanie dvoch čísiel trvalo 0,2 ms a násobenie 2,8 ms. Počítač mal magnetickú pamäť s kapacitou 100 čísiel a počítal priamo v desiatkovej sústave. Ide o najznámejší počítač tej doby.

V Československu bol prvý projekt na zhotovení číslicového počítača predstavený profesorom Svobodou už v roku 1947. V roku 1951 sa začal vo Výzkumném ústavu matematických strojů vývoj prvého československého samočinného počítača SAPO, ktorý bol dokončený v roku 1958. Obsahoval 7 000 relé a 350 elektróniek. Výpočty prebiehali kvôli spoľahlivosti v troch jednotkách súbežne a o správnom výsledku sa "hlasovalo". Tento princíp redundancie bol v počítači použitý vôbec prvýkrát. V roku 1960 bol pre neopraviteľnú chybu reléovej operačnej jednotky vyradený z prevádzky. Dovtedy však stihol urobiť výpočty pre logické obvody elektrónkového počítača EPOS. Ten bol skonštruovaný v roku 1962, ale pre vysokú nespoľahlivosť (priemerne každých 80 minút mal poruchu) sa nedostal do sériovej výroby.

V roku 1948 začala v Sovietskom Zväze skupina S.A. Lebedeva vyvíjať číslicový počítač. Do prevádzky bol uvedený v roku 1951.

Ďalší vývoj výrazne ovplyvnil vynález tranzistora v roku 1947 v Bellových laboratóriách v USA. Za vynález tejto revolučnej polovodičovej súčiastky dostali autori Shockley, Bardeen a Brattain Nobelovú cenu. V roku 1959 súčasne vo firmách Fairchild Semiconductor a Texas Instruments vynašli integrovaný obvod, ktorý na malej ploške polovodičového čipu obsahoval desiatky tranzistorov. V súčasnosti sa na jeden čip veľkosti ľudského nechtu dajú umiestniť milióny tranzistorov. Číslicové integrované obvody sa tak stali základom ďalšieho rozvoja výpočtovej a automatizačnej techniky.

Analýza problémov spojených s rýchlymi výpočtami možných pohybov lietadla a nastavenia palebných prvkov protiletadlového dela viedla skupinu amerických vedcov na čele s prof. N. Wienerom už okolo roku 1945 k nájdeniu mnohých zhodných rysov v chovaní zložitých radiacích systémov s prácou ľudského mozgu. Výsledky tohoto skúmania popísal prof. N. Wiener vo svojej knihe "Kybernetika alebo riadenie a oznamovanie v živých organizmoch a strojoch". Všeobecné princípy automatického riadenia, ktoré kybernetika ako nový vedný odbor popisala, pomohli nielen konštruktérom prvých amerických samočinných počítačov ale kybernetika je aj dnes stále teoretickou základňou rozvoja informačnej a radiacej techniky ale tiež aj nových vedných odborov.

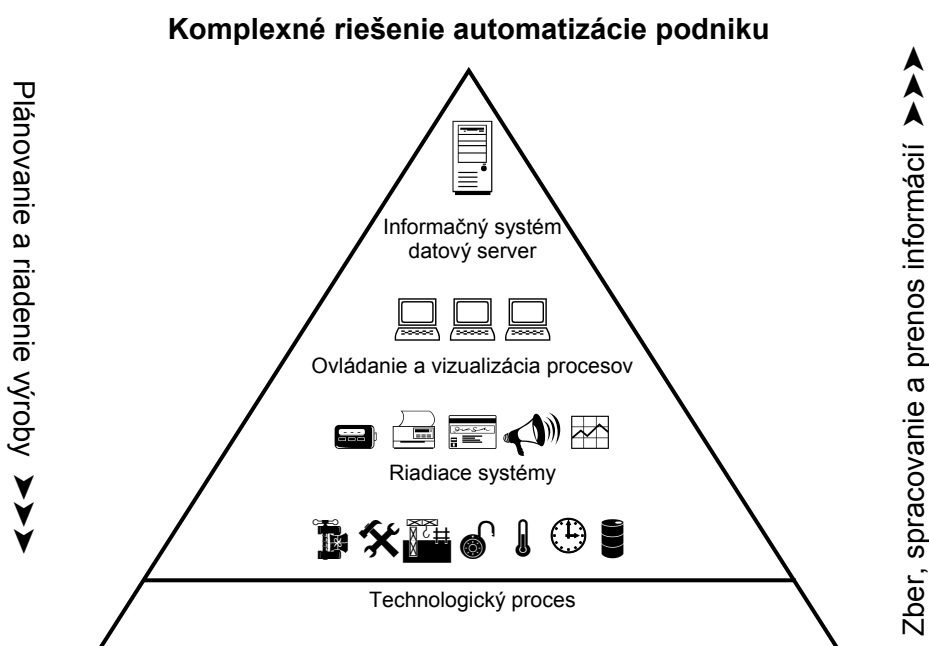
Do začiatku éry samočinných počítačov staval človek stroje, ktoré znásobovali jeho silu, rýchlosť, videnie apod., teda automatizovali fyzickú prácu. Teraz však už dokázal postaviť stroj, ktorý do určitej miery dokázal rýchlo napodobniť duševnú prácu človeka, a tým ju mohol využiť na realizáciu zložitých riadiacich systémov. Riadenie počítačom zmenilo výrazne aj vzhľad centrálnych dispečerských pracovísk a velínov. Namiesto stoviek panelových meracích prístrojov dostala obsluha k dispozícii rad obrazoviek, na ktorých si mohla zobrazit' požadované údaje podľa okamžitej potreby.

Nástup mikroprocesorov začiatkom osemdesiatich rokov umožnil, aby sa mohol mikroprocesor zabudovať priamo do zariadenia. Mikroprocesor tak predstavoval prostriedok pre realizáciu pružnej automatizácie. Bol základom moderných programovateľných automatov, programovateľných regulátorov, číslicovo riadených obrábacích strojov apod.

Nízka cena automatizačných prvkov a prostriedkov postupne umožnila využívať automatizáciu nielen v priemysle ale aj v domácnostiach. Sú to rôzne domáce spotrebiče, ktoré majú automatizované aj zložité funkcie. K jednoduchším príkladom patria žehličky, rýchlovarné kanvice, rúry na pečenia apod. K tým zložitejším radíme napríklad automatické pračky, mikrovlnné rúry, CD prehrávače, umývačky riadu, kuchynské roboty apod.

Súčasná číslicová a automatizačná technika sa intenzívne využíva aj v diagnostických lekárskech prístrojoch a zariadeniach. Prístroje sú schopné robiť monitorovanie a diagnostiku rôznych ľudských orgánov, alebo podporujú realizáciu aj tých najzložitejších chirurgických operácií.

Prepojovanie počítačov do sietí, ktoré je také charakteristické pre súčasnú informačnú spoločnosť, má v oblasti automatizácie už mnohoročnú tradíciu. Už prvé americké kozmické sondy na Mars a Venušu boli riadené tak, že počítač na palube kozmickej sondy spolupracoval priamo s ďalšími počítačmi v pozemných riadiacich staniciach a s centrálnym počítačom riadiaceho strediska v Houstone. V súčasnosti tvoria počítačové riadiace prostriedky základňu v pyramíde automatizovaných informačných a riadiacich systémov mnohých firiem (Obr. 4, Obr. 20).

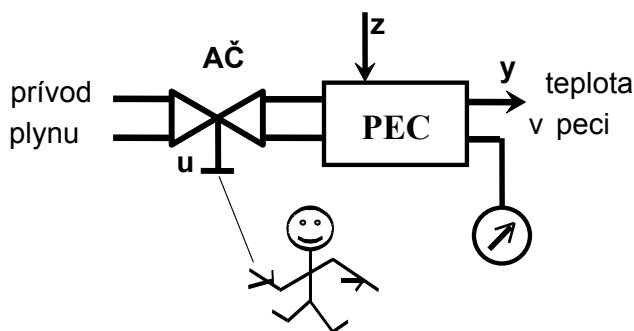


Obr. 4 : Hierarchia počítačových riadiacich systémov

Teda možnosti človeka pre uskutočňovanie výkonných a riadiacich procesov sa postupne zlepšovali hlavne s technickým pokrokom od mechanizácie, cez automatizáciu až po automatizované systémy riadenia a automatické riadenie.

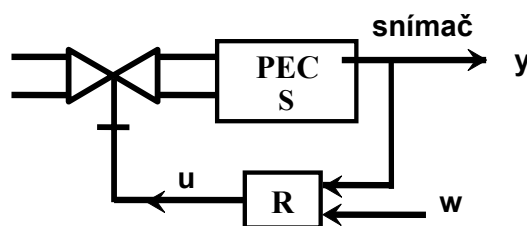
## 1.2 Účel automatizácie

Automatizáciou rozumieme proces náhrady fyzickej a duševnej práce človeka činnosťou strojov. Účelom automatizácie je úplné alebo čiastočné nahradenie človeka pri riadení procesov automatmi. Pri ručnej regulácii napríklad teploty pece (Obr. 5) nastavuje človek ručne akčnú veličinu pomocou akčného člena, ktorého úlohou je regulovať prítok energie. Rozhodovanie robí na základe okamžitej hodnoty regulovanej veličiny, ktorú získaval v minulosti len napríklad zrakom a dnes ju získava meraním výstupu sústavy vhodným meracím prístrojom.



Obr. 5 : Ručná regulácia teploty pece

Pri automatickej regulácii (Obr. 6), teda samočinnom udržovaní hodnôt regulovanej veličiny podľa jej nameranej skutočnej hodnoty a podľa požiadaviek, je človek nahradený regulátorom.



Obr. 6 : Automatická regulácia teploty pece

Dôvody takejto náhrady riadiacej činnosti človeka automatickým zariadením sú rôzne. K hlavným patria najmä dôvody ochrany zdravia a života človeka, dôvody vyššej bezpečnosti pri riadení rýchlych a nebezpečných zariadení ako sú napríklad jadrové elektrárne alebo lietadlá a kozmické lode, ale aj dôvody ovplyvňujúce ekonomiku výroby ako je znižovanie nákladov, zvyšovanie produkcie, dlhodobé dosahovanie vyššej kvality a tiež znižovanie dopadov na ekológiu.

Automatizácia umožňuje rýchle a presné zmeranie rôznych parametrov riadených procesov a aj rýchle vyhodnotenie zistených hodnôt a realizáciu požadovaného zásahu v reálnom čase. Pritom je možné robiť to tak, aby sa dosahovali optimálne náklady, optimálne časové priebehy, optimálne čerpanie surovín a ďalších zdrojov.

Pre zachovanie existencie ľudského života na našej planéte nepostačujú len priaznivé prírodné podmienky, ktoré musíme chrániť, ale ľudské spoločenstvo sa musí samo snažiť stále rozvíjať. Neživá príroda je charakterizovaná nárastom entropie, ktorá je rovnocenná prechodu nejakej sústavy zo stavu usporiadaného, málo pravdepodobného, do stavu pravdepodobnejšieho, neusporiadaného, chaotického. Jedine živá hmota má schopnosť znižovať svoju entropiu. Bez vývoja k stále vyššej úrovni existencie by spoločnosť najprv začala stagnovať, potom by nasledovala degradácia a následne jej zánik. Automatizácia je súčasťou vedecko-technického pokroku, ale svojimi dôsledkami ovplyvňuje aj ostatné oblasti spoločenského pokroku a života spoločnosti. Predstavuje teraz najvyššiu úroveň zdokonaľovania výrobných procesov, ktorými si spoločnosť vytvára hmotné statky potrebné pre svoju existenciu. Prechod od ručnej a strojovej výroby k automatizovanému spôsobu výroby je spojený so zásadnými zmenami

charakteru ľudskej práce, čo má priamy vplyv aj na mnoho oblastí v ľudskej spoločnosti. Napríklad vznikajú a zanikajú rôzne zamestnania. Mení sa charakter ale i spôsob práce v mnohých profesiách a odboroch.

Okrem automatizácie výroby má automatizácia veľký význam aj v nevýrobných oblastiach ako sú nemocnice, automatické telefónne ústredne alebo v domácnosti. Automatizácia umožňuje, aby ľudia mohli účelnejšie využívať svoje tvorivé schopnosti a tiež viac sa venovať svojim záujmom vo voľnom čase. Automatizácia je na jednej strane podmienená všeobecným vedecko-technickým pokrokom, ale na druhej strane stimuluje rozvoj mnohých ďalších odvetví priemyslu a aj vedných odborov. Nezanedbateľný vplyv má automatizácia aj na rozvoj vzdelanosti spoločnosti, lebo nielenže vyžaduje vysoko kvalifikovaných pracovníkov pre návrh a realizáciu automatických systémov, ale súčasne tiež umožňuje automatický prístup k informáciám a sprostredkováva ich automatickú výmenu. Pohľad na súčasnú technicky vyspelú ľudskú spoločnosť teda jednoznačne poukazuje na úzku súvislosť medzi automatizáciou a spoločenským pokrokom súčasnej aj budúcej civilizácie.

Automatické riadenie a automatizované systémy riadenia patria medzi významné oblasti aplikácie *kybernetiky*, ktorá je ich teoretickým základom.

### 1.3 Úvod do kybernetiky

Hoci sme mohli vidieť už na príklade zo starovekej Alexandrie, že ľuďom bola známa sila pary a teplého vzduchu už dávno, aj tak človek využil silu pary až v novoveku tak, aby mu naozaj slúžila pre uľahčenie jeho práce. K tomu bol nutný vývoj prírodných a technických vied, technických prostriedkov a zodpovedajúci rozvoj spoločnosti, ktorý dané potreby vyžadoval. Popis prvého automatu pochádza už z roku 1588. Bol to automat na reguláciu prísunu množstva zrna v závislosti od otáčok mlynských kameňov (Obr. 2). Známym klasickým automatom je aj historický Wattov odstredivý regulátor otáčok z roku 1784, ktorého princíp (Obr. 3) sa využíva aj dnes. S rozvojom techniky a spoločnosti prechádzalo stále viac strojov od priameho riadenia ľuďmi na riadenie automatické. Popri mechanických kalkulátoroch začali vznikať aj počítačové stroje a doba dozrievala pre uvedenie si a definovanie pojmu *kybernetika*. Podnetom boli aj otázky typu : Aké veľké množstvo správ je možné prenášať určitým prenosovým kanálom? Ako správy vhodne kódovať, aby bol ich prenos čo najrýchlejší, čo najúspornejší a čo najbezpečnejší? Ako minimalizovať chyby prenosu? Aký je vzťah medzi dĺžkou správy a množstvom prenášanej informácie? A tak ďalej.

Myšlienkové bohatstvo kybernetiky najviac rozvinuli matematici, odborníci v technických vedách, ako elektrotechnika rádiotechnika, a vo fyziológii.

Názov "kybernetika" je odvodený z gréckeho slova *kybernétes*, ktoré sa používalo pre označenie kormidelníka lode. V spisoch starovekých spisovateľov, najmä v Platónových "Dialógoch", sa uvádza kybernetika ako náuka o spravovaní a riadení provincií, a to v oveľa širšom zmysle ako politika. Keď v tridsiatich rokoch devätnásteho storočia robil francúzsky fyzik A. M. Ampère triedenie vied, spomenul si aj na túto náuku a zaradil ju do prehľadu spoločenských vied ako vedu, ktorá by skúmala riadenie spoločnosti.

KYBERNETIKA ako vedecká disciplína študuje všeobecné zákonitosti procesov získavania prenosu, spracovania, uchovania informácie a jej využitia pre riadenie a v riadení, pričom môže ísť ako o technické systémy ("stroje"), tak aj o systémy organické, alebo dokonca aj o stroje, ktoré ešte ani neexistujú a zatiaľ sú len v predstavách vedcov, pretože doposiaľ neboli alebo nemohli byť z rôznych dôvodov skonštruované.

Rozhodujúce zásluhy o ustanovenie kybernetiky ako nového vedného odboru bývajú prisudzované matematikovi *Norbertovi Wienerovi*, ktorý v roku 1948 uverejnil knihu "Kybernetika alebo riadenie a oznamovanie v živých organizmoch a strojoch", ktorá obsahuje prvé systematické spracovanie najdôležitejších princípov nového odboru. Pracoval v odbore matematickej analýzy, teórie pravdepodobnosti, elektronických obvodov a výpočtovej techniky. Počas druhej svetovej vojny spolupracoval s ďalšími odborníkmi hlavne na vývoji počítačov.

Východiskom vzniku a rozvoja kybernetiky bola dosiahnutá úroveň poznatkov a skúseností so stavbou rôznych typov automatov a v neposlednom rade aj určenie miery a veľkosti správ a príkazov (povelov), definovaná ako bit, objavená Hartleyom a rozpracovaná C. Shannonom. Bol objasnený vzťah "informácia - signál - kód". Je však zaujímavé, že exaktná definícia informácie vznikla až v nedávnej dobe. Norbert Wiener matematicky popísal prenos a spracovanie signálu objektom, a to ako neživým, tak aj živým, vrátane spätnej väzby, ktorú zhodnotil ako elementárny a zároveň aj univerzálny princíp, ktorého sústavným používaním môže vzniknúť diskretná (nespojité) signálová sústava, prenášajúca a pretvárajúca kód. Našiel pre to tiež dve analógie: elektronické počítače a mozog, najmä ľudský.



Okrem už uvedenej definície sú uvádzané aj ďalšie definície kybernetiky. Z nich uvedieme tieto nasledujúce tri najdôležitejšie definície :

1. Kybernetika je veda, ktorá matematickými metódami študuje riadiace systémy a procesy riadenia.
2. Kybernetika je veda o procesoch prenosu, spracovania a zachovania informácií.
3. Kybernetika je veda, ktorá študuje spôsoby tvorby, stavby a transformácie algoritmov popisujúcich procesy riadenia.

## 1.4 Základné pojmy

Kybernetika sa teda zaoberá štúdiom systémov ľubovoľnej povahy, ktoré sú schopné prijímať, zachovávať a spracovávať informáciu a využívať ju k riadeniu a regulovaniu.

Medzi základné pojmy kybernetiky, okrem už spomínaného a ďalej definovaného pojmu *informácia*, patria pojmy *riadenie*, *spätná väzba*, *model* (definujeme neskôr), *zákon nutnej variety* a pojem *algoritmus*.

### 1.4.1 Pojem a definícia riadenia, spätnej väzby, zákona nutnej variety a algoritmu

*Riadenie* je cieľavedomý spôsob dosiahnutia požadovaného stavu alebo chovania riadeného objektu, alebo riadenie je zavádzanie vstupných informácií do riadeného objektu (sústavy) za účelom dosiahnutia požadovaného výstupného stavu (výstupných stavov) väčšinou pri splnení určitých kritérií optimálnosti, ako je kvalita, čas, cena a ekologické hľadiská. Rozumieme teda pod ním mnohostrannú, uvedomelú, aktívnu, tvorivú činnosť, v ktorej riadiaci subjekt stanovuje ciele, ovplyvňuje metódy, prostriedky a spôsob správania riadených objektov tak, aby celá sústava optimálne plnila určené funkcie a dosahovala stanovené ciele v určenom čase a kvalite.

Ak správanie riadeného systému vyhovuje našim potrebám, tak nijaké riadenie nie je potrebné. Ale ak nám správanie riadeného systému z akýchkoľvek dôvodov nevyhovuje, tak je potrebné robiť také pôsobenie na riadený systém, aby sme požadované správanie dosiahli.

Riadenie je späté s určitým chovaním systému, ktoré smeruje k istému cieľu. Oblasť aplikácie kybernetiky je teda oblasť riadenia systémov s "cieľovým chovaním" - od Wattovho regulátora parného stroja až po moderné číslicové riadiace systémy.

Druhým základným pojmom je *spätná väzba*, spojenie výstupov riadeného systému so vstupmi riadiaceho systému, ktorým sa uzatvára kruh ich vzájomných väzieb. Spätná väzba je základnou zložkou každého samoriadiaceho sa systému. Poskytuje *informácie* o výsledkoch činnosti riadeného objektu a o plnení úloh.

*Zákon nutnej variety* v podstate hovorí, že ak chceme pomocou riadenia odstrániť neurčitost', potom množstvo neurčitosti odstránené za jednotku času nemôže byť väčšie, ako je kapacita riadiaceho systému ako komunikačného kanálu. Inak povedané, pre dobré riadenie musí byť riadiaci systém v istom zmysle modelom riadeného systému.

Ďalší pojem, s ktorým kybernetika operuje, je *algoritmus*. Je to presný a jednoznačne stanovený postup riešenia úlohy, vyjadrený konečným počtom krokov (operácií). Algoritmus je nástrojom na riešenie úloh, ktoré sa opakujú s veľkou početnosťou, ktorých riešenie sa dá algoritmicky popísať, a teda sa dajú spracovávať na počítačoch.

### 1.4.2 Pojem a definícia informácie

Kybernetika a ďalšie vedné disciplíny ako teória informácie, štatistika, žurnalistika a lingvistiká sa pričínili o to, že pojem informácia sa v tomto storočí preniesol do pojmového aparátu celého radu vedných disciplín. Informácia je v súčasnosti jedným z najpoužívanejších pojmov, pričom rôzne odbory skúmajú tento pojem z najrozličnejších hľadísk.

Základy teórie informácie predložil C. E. Shannon. Ten pod pojmom *informácia* nechápal akúkoľvek správu, ale iba takú, ktorá znižuje neurčitost' príjemcu informácie. Neurčitost' existuje vtedy, ak existuje výber z niekoľkých možností, čo je typické pre ľudskú činnosť (poznávanie, styky, riadenie atď.), ale aj pre kybernetickú techniku, pre živú aj neživú prírodu.

Americký matematik Norbert Wiener, zakladateľ kybernetiky [7], [23], [24], charakterizoval informáciu ako tú časť správy (oznámenia), resp. takú správu, ktorá smeruje od zdroja k príjemcovi, a ten ju potrebuje pre plnenie svojich úloh : obsahuje niečo nové – originálne, o čom príjemca nevedel, čím sa rozširujú jeho vedomosti a znalosti týkajúce sa zobrazovanej objektívnej reality a zároveň sa odstraňuje alebo aspoň znižuje stupeň neurčitosti jeho chovania.

Pojem informácia nie je iba kybernetickým pojmom. Je rozpracovaný celý rad nových teórií zaoberajúcich sa informáciou a skúmajúcich tie jej aspekty, ktoré v kybernetickom ponímaní nie sú

prvoradé. Ide predovšetkým o sémantické a pragmatické teórie informácie. V 60-tych rokoch sa objavili kybernetické varianty teórie hodnoty informácie, ktoré využívali teóriu hier, teóriu algoritmov a teóriu optimálneho riadenia. Celý rad novo vznikajúcich vedných odborov prináša neustále nové pohľady na informáciu. Fyzikálna realizácia informácie sa volá *signál*. Viac rozširujúcich poznatkov o informáciách, kódach, komunikačných kanáloch, o kódovaní a prenose informácií je možné získať z ďalšej odbornej literatúry [8], [66], [74], [69].

### 1.4.3 Informatika a jej definícia

Informatika je nový odbor. Začala ovplyvňovať svet a čo je dôležité, začala svet spájať. Vstupuje prakticky do každej ľudskej činnosti. Za základné teoretické zdroje informatiky sa považujú :

- a) *heuristické teórie odbornej informácie* : knihoveda, teória knihovníctva, teória bibliografie, teória dokumentácie, teória odbornej informácie, teória informačných systémov a ďalšie, ako napríklad teória propagácie, prekladovej činnosti, mechanizácie a automatizácie,
- b) *komunikačné disciplíny* : predovšetkým kybernetické teórie, sémanticko-lingvistické teórie, teórie sociálneho informovania, teórie počítačov,
- c) *hraničné, prienikové vedy* : matematika, logika, psychológia a ďalšie.

Informatiku po stránke obsahovej a významovej môžeme chápať nasledovne :

- a) *Informatika je teóriou vedeckých informácií (Scientific Information)*
- b) *Informatika je teóriou počítačov (Computer Science)*
- c) *Informatika je kybernetickou teóriou*
- d) *Informatika je informačnou vedou (Information Science)*
- e) *Informatika je vedným integrátorom (Computer and Information Science)*

Na medzinárodnom kongrese v Japonsku bola v roku 1978 prijatá definícia, podľa ktorej *predmetom informatiky* sú oblasti súvisiace s vývojom, tvorbou, využívaním, materiálne – technickým zabezpečením a organizáciou systémov spracovania informácií vrátane ich priemyselného, ekonomického, správneho, sociálneho a politického pôsobenia. American Society for Information Science zaviedla definíciu informatiky, ktorá vystihuje jej moderné ponímanie : "*Informatika* sa zaoberá vznikom, zhromažďovaním, organizáciou, interpretáciou, ukladaním, vyhľadávaním, rozširovaním, pretváraním a využívaním informácií s osobitným zreteľom na aplikáciu modernej techniky v týchto oblastiach. Má čisto vedecké (teoretické zložky), ktoré skúmajú predmet bez ohľadu na aplikáciu a aplikačné (praktické) zložky, ktoré prispievajú k rozvoju služieb a produktov." Teda súčasné ponímanie informatiky vychádza z integrovaného komplexného pohľadu na problém informácií v spoločnosti.

### 1.4.4 Informatizácia

*Informatizácia* predstavuje zavádzanie informatiky do praxe. Je jedným z charakteristických rysov súčasnosti a je to globálny proces spojený so zásadnými zmenami štruktúry a charakteru svetového, ekonomického a sociálneho rozvoja, s prechodom na nové druhy informačnej výmeny. Tento proces zahŕňa v rôznej miere svetové spoločenstvo, pôsobí na väčšinu sfér činnosti a podstatne mení charakter jeho rozvoja, ekonomické vzťahy v ňom, úroveň a kvalitu života spoločnosti.

Informatizácia je *proces prenikania a využívania informácií a informačných technológií* vo všetkých oblastiach života spoločnosti s cieľom dosiahnuť jej efektívne fungovanie. Prejavuje sa komplexným, plošným a rozhodujúcim pôsobením informatiky na hospodárstvo, priemysel, štátnu správu, samosprávu, kultúru, školstvo, dopravu, trh, vedeckotechnický rozvoj (výskum aj vývoj), zdravotníctvo, spotrebu a životnú úroveň, a vôbec na celú spoločnosť a všetky jej sféry v danom štáte alebo zoskupení štátov.

### 1.4.5 Informačné technológie

*Informačné technológie* zahŕňajú procesy zberu, prenosu, uchovania, spracovania a distribúcie informácií ako aj komplex nových vedeckých poznatkov a materiálnu základňu pre realizáciu uvedených procesov. Informačné technológie zlepšujú možnosti získavania a využívania informácií v pravý čas a na

pravom mieste a sú predpokladom prežívania a rozvoja ako jednotlivcov, tak aj skupín a národov. Medzi najvýznamnejšie moderné informačné technológie patria : počítače, telekomunikačné siete ako aj databázové systémy.

V trhovej ekonomike sa využívajú účinné matematické a štatistické metódy z oblasti operačnej analýzy. Ide najmä o optimalizačné nástroje, akými sú napríklad matematické programovanie - či už lineárne alebo nelineárne, sieťové modely, modely zásob, ako aj simulačné modely. Pre potrebu rozhodovania sú dosť významné simulačné modely typu Monte Carlo, nakoľko umožňujú uvažovať celý rad náhodných faktorov, ktoré sú typické pre fungovanie trhovej ekonomiky. Ďalšími nástrojmi, používanými v trhovej ekonomike, sú diskriminačná analýza, faktorová analýza a zhluková analýza.

V súčasnosti sa prejavuje snaha spájať a integrovať viaceré moderné informačné technológie do jedného konzistentného celku. V oblasti automatizácie administratívnych prác úsilie výrobcov počítačov smeruje k vytvoreniu kancelárie budúcnosti, kde sa má integrovať automatizované spracovanie textov, systémy na podporu rozhodovania, elektronická pošta a databázové systémy do jedného celku. Podobný vývoj sa uskutočňuje aj v oblasti výroby a jej prípravy alebo v oblasti riadenia projektov apod.

Riadenie projektov (project management) sa zameriava na efektívne využívanie osôb, zariadení, finančných prostriedkov a času spojeného s realizáciou projektov. Projektové riadenie sa podstatne líši od riadenia opakovateľných procesov. Predstavuje náročnú činnosť spojenú s detailnou koordináciou zdrojov projektu (pracovníkov, zariadení, financií apod.). Efektívne riadenie projektu je v súčasnosti prakticky nemožné bez uplatnenia sieťových modelov a výpočtovej a informačnej techniky. Projektové riadenie je vo svete podporované PC softwarom, ktorý projektu prináša celý rad výhod, ako je napr. väčší súlad medzi projektami a osobami, zvýšenú vierohodnosť, zvýšenú zodpovednosť osôb, zníženie rizika, zlepšenie kontroly a rozhodovania.

#### 1.4.6 Informačné systémy

*Informačné systémy (IS)* sú také systémy, ktoré popisujú a následne definovaným spôsobom reprodukovujú intelektuálnu schopnosť človeka pri získavaní, spracovávaní a vyhodnocovaní údajov s cieľom získať informácie potrebné pre jeho ďalšiu činnosť. Z hľadiska praktickej realizácie to znamená, že sú to systémy riadenia a technológie zberu, prenosu, uchovávaní, spracovania a distribúcie dokumentov, informácií a informačných služieb. Informačné systémy môžeme klasifikovať podľa rôznych hľadísk, napríklad podľa :

- funkcie IS,
- oblasti využívania,
- stupňa automatizácie,
- priestorového rozloženia jednotlivých subsystémov.

Pri klasifikácii IS podľa ich funkcie delíme IS podľa toho, aké služby poskytuje IS jeho koncovému používateľovi. V tomto zmysle rozlišujeme IS referenčné, zdrojové a logické (syntetizujúce). Funkciou referenčných IS je pamätať si údaje o správach a informáciách, ktoré sú zaznamenané obyčajne na dokumentoch alebo iných nosičoch mimo IS. Tento druh IS odpovedá používateľovi na otázku nepriamo : informácie, ktoré potrebujete, existujú, prípadne neexistujú a obsahujú tieto dokumenty či iné zdroje. Zdrojové IS poskytujú používateľovi na jeho otázku už cieľové fakty a nie odkaz na ich existenciu alebo miesto uloženia. Logické (syntetizujúce) IS fakty nielen uchovávajú, ale na ich základe použitím logických operácií aj odvodzujú nové fakty, úsudky, hypotézy, ktoré nie sú v informačnom systéme priamo uložené.

Podľa oblasti využívania môžeme zase IS deliť pre :

- oblasť organizácie a riadenia,
- oblasť vedy, výskumu, výchovy a vzdelávania,
- oblasť masovokomunikačného informovania a informačných služieb verejnosti, napr. rozhlas, televízia, IS rezervácie leteniek alebo vlakových miesteniek apod.

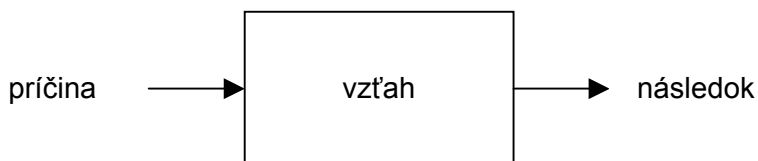
Veľmi významnou skupinou IS sú manažérske IS (MIS), ktoré poskytujú odborným pracovníkom buď dáta alebo informácie, ktoré majú vzťah k operáciám, ktoré sa vyskytujú v organizácii. Podporujú aktivity zamestnancov, vlastníkov a akcionárov tým, že im poskytujú spoľahlivé a včasné informácie, alebo im pomáha vykonávať transakcie. Manažérsky IS pozostáva z nasledujúcich subsystémov :

- 1.) Systémy pre transakčné spracovanie (Transaction Processing Systems - TPS).
- 2.) Systémy pre informačné vykazovanie (Information Reporting Systems - IRS).
- 3.) Systémy pre podporu rozhodovania (Decision Support Systems - DSS) vrátane expertných systémov.
- 4.) Systémy pre automatizáciu administratívnych prác.

## 1.5 Systémy a ich modely

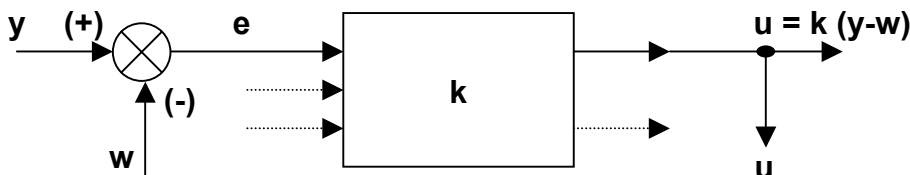
Reálne existujúcu vec, skladajúcu sa zo vzájomne spojených častí, nazývame *objekt*. Teda pod *objektom* (procesom, javom apod.) rozumieme účelovo vymedzenú časť objektívnej reality, ktorá je predmetom nášho ďalšieho skúmania alebo využívania. Všetko ostatné nazveme okolím objektu.

Nutným východiskom pre správne riadenie nejakého objektu je pochopenie jeho činnosti ako vo vzťahu medzi pôsobiacimi príčinami (vstupmi) a ich dôsledkami (výstupmi). Niekedy sa hovorí o tzv. *kauzálnej (orientovanej) relácii* alebo o *príčinnom vzťahu* (ide vlastne o transformáciu informácie). Smer tejto závislosti je dopredu daný a nemenný, preto orientovaný, a je jednoznačne určený šípkou. Schématicky môžeme tento vzťah zapísať : príčina -> dôsledok, alebo vyjadriť graficky (Obr. 7). Je potrebné pripomenúť *axióm kauzality* : následky nemôžu predbiehať svoje príčiny, naopak sa za svojimi príčinami viac alebo menej opožďujú.



Obr. 7 : Kauzálna reakcia

Grafické zobrazenie tvorí teda *blok*, ktorý má jeden alebo aj viac vstupov a jeden alebo viac výstupov a je v ňom uvedený vzťah medzi vstupom a výstupom, a to najčastejšie matematicky (diferenciálna rovnica, obrazový prenos apod.). Signály sú znázornené orientovanými úsečkami, transformácie blokmi a rozdelenie signálov bodkou na styku úsečiek. Združovanie signálov, či už ide o súčet alebo rozdiel, je znázornené prekříženým krúžkom a príslušným znamienkom, alebo je kvadrant záporného vstupu začiarovaný (Obr. 8). Je to teda náhrada reálneho (hmotného) objektu jeho abstraktným popisom chovania, ľahko vyjadriteľným napríklad matematicky alebo logicky.



Obr. 8 : Blokové znázornenie toku signálov

Pri skúmaní objektu sa väčšinou nezaujíname o objekt ako o celok, ale sústreďujeme sa na veličiny (vlastnosti) pre nás podstatné a zanedbáme veličiny (vlastnosti) v danom prípade pre nás nepodstatné. Na objektoch teda pre zjednodušenie definujeme *systémy*, ktoré určitým spôsobom odrážajú niektoré vlastnosti objektov, ktoré sú pre nás z určitého hľadiska podstatné. Jeden zo zakladateľov kybernetiky, W. R. Ashby, vraví [21], že na každom materiálnom objekte je možné definovať nekonečné množstvo objektov. Systém je teda určitou abstraktnou interpretáciou reálnej skutočnosti - objektu. Je to útvar skladajúci sa z menších častí (podsystemov), ktoré majú vzájomné väzby a tiež väzby na okolie systému.

V procese definovania systému na objekte môžeme rozlíšiť niekoľko hierarchických úrovní. Systém definujeme na objekte z určitého hľadiska. Toto hľadisko znamená, že zvolíme určité vlastnosti, ktoré budeme ďalej pozorovať alebo merať. Všetko ostatné zahrnieme pod pojem okolie systému. Súbor zmien pozorovaných vlastností (premenných) nazveme *aktivita systému*. Presnosť a frekvencia, s akou meriame jednotlivé premenné, určujú časovo priestorovú *rozlišovaciu úroveň* v priestore zvolených premenných. Ak vymedzíme oblasť nášho záujmu tak, že definujeme súbor vlastností (premenných), ktoré nás zaujímajú a ktoré môžeme na danom objekte pozorovať alebo merať, zvolíme príslušnú

rozlišovaci úroveň a určíme rozsah prípustných hodnôt všetkých veličín, potom hovoríme, že na objekte sme definovali tzv. *zdrojový systém*. Zdrojový systém je vlastne vymedzenie univerzálnej množiny charakterizujúcej daný systém. Ak doplníme zdrojový systém konkrétnou vzorkou aktivity systému (dátami), dostaneme takzvaný *dátový systém*. Ak nájdeme vzťah medzi premennými systému, ktorý nám umožní generovať rovnaké dáta, ako obsahuje spomínaná vzorka aktivity, získame takzvaný *generatívny systém*. Ak sa nám podarí tento vzťah rozložiť na dielčie vzťahy a nájsť väzby medzi dielčiami vzťahmi (generatívne podsystémy) dôjdeme ku *štruktúre systému*. Každá zo spomenutých úrovní pri definovaní systému na objekte znižuje postupne neurčitost' v popise systému. Postup pri definovaní systému na objekte s využitím hierarchických úrovní býva často formalizovaný pomocou množinovej symboliky [66].

Hodnoty veličín, ktoré spôsobujú zmeny ostatných veličín systému a samy závisia len na okolí systému, nazývame *vstupy* systému. Na druhej strane veličiny systému, ktoré spôsobujú zmeny veličín zahrňovaných do okolia systému, tie nazývame *výstupy* systému. Ak u daného systému môžeme veličiny rozdeliť na vstupy a výstupy, nazývame taký systém *riadený* alebo *orientovaný* systém. Systémy, pre ktoré takéto rozdelenie neexistuje, alebo ho nepoznáme, nazývame *neriadené*, *voľné* alebo tiež *neutrálne* systémy. Príkladom riadeného systému môže byť odporový delič (Obr. 9 a). Napätie na celom deliči je vstupnou veličinou, napätie na odbočke deliča je výstupnou veličinou. Riadeným systémom môže byť aj spaľovací motor, kde prietok paliva, prietok vzduchu a záťažový moment sú vstupné veličiny, otáčky kľukového hriadeľa sú výstupnou veličinou. Príkladom neriadeného (neutrálneho) systému môže byť harmonický oscilátor, pokiaľ za vstup nepovažujeme nutnú dodávku energie. Podobne by bol neutrálnym systémom aj systém popisujúci hádzanie mincou alebo hracou kockou.

Rozdelenie veličín systému na vstupy a výstupy chápeme ako rozdelenie na príčiny a následky. Zmeny vstupov sú príčinami zmien výstupov a zmeny výstupov sú následkom zmien vstupov. Smer od príčiny ku následku udáva vlastne smer orientácie systému a tiež smer kauzality. Pretože všetky fyzikálne deje môžu prebiehať len konečnou rýchlosťou, musí príčina predchádzať následok. Systémy, ktoré spĺňajú túto podmienku, nazývame *kauzálne* alebo *neanticipatívne*. Ak môžeme chovanie systému úplne popísať ako množinu usporiadaných dvojíc príčin a následkov, t.j. ak určitej príčine vždy zodpovedá rovnaký následok, považujeme taký systém za *deterministický*. U deterministického systému je príčina nutnou a aj postačujúcou podmienkou pre určenie následku. Príkladom deterministickej zákonitosti môže byť prvý Newtonov zákon. Ak pôsobí sila (príčina), pohyb hmotného bodu sa zrýchľuje (následok), a naopak ak sa pohyb hmotného bodu zrýchľuje, musí na neho pôsobiť nejaká sila.

Trochu iná je situácia napríklad v oblasti mikrosвета. Jednotlivé častice nemôžeme od seba odlišiť, nemôžeme stanoviť, že častica A má práve rýchlosť  $v_1$ . Môžeme len určiť pravdepodobnosť, s akou môže mať istá častica rýchlosť  $v_1$ , alebo pravdepodobnosť, že určitý počet častíc má práve rýchlosť  $v_1$ . V takom prípade môže jednej príčine odpovedať niekoľko rôznych následkov (s rôznymi pravdepodobnosťami) alebo jeden následok môže byť vyvolaný rôznymi príčinami. Príčina je tu nutnou ale nie postačujúcou podmienkou pre určenie následku. Systémy s takými vlastnosťami nazývame *stochastické systémy*. Na deterministické systémy sa môžeme pozeráť ako na špeciálny prípad stochastických systémov, kedy istej príčine zodpovedá príslušný následok s pravdepodobnosťou 1. Stochastické chovanie však vykazujú aj deterministické systémy, na ktoré pôsobí veľké množstvo príčin, z ktorých niektoré nepoznáme, alebo nie sú prístupné nášmu pozorovaniu alebo meraniu. Keby sme napr. poznali všetky sily a momenty, ktoré pôsobia pri hádzaní hracou kockou, mohli by sme presne stanoviť, v akej polohe sa kocka zastaví.

Nakoniec si uvedieme tretie základné hľadisko klasifikácie systémov. Ak nadobúdajú premenné systému hodnoty z množiny reálnych čísel, hovoríme, že ide o *systém spojitý*. Ak nadobúdajú premenné systému hodnoty z množiny celých čísel, hovoríme, že ide o *systém diskretný*. Ak sa pre výklad teórie systémov používa množinová symbolika, je jej použitie u diskretných systémov jednoduchšie a názornejšie. Premenné, ktoré sú spojitými funkciami, veľmi často vzorkujeme a kvantujeme. Pre analýzu, syntézu alebo simuláciu systémov často používame číslicové počítače, ktoré pracujú práve s diskretnými veličinami.

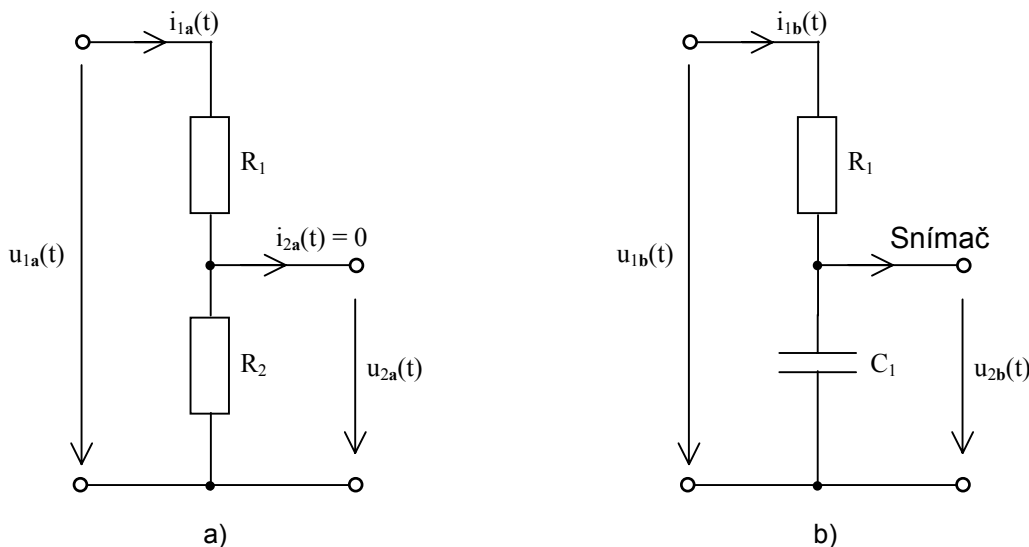
*Dynamický systém* (dynamická sústava) je útvar (vec) s vnútornou organizáciou, ktorý je vystavený toku vstupných signálov (nezávislých na stave a činnosti tejto sústavy) a produkuje ako výsledok svojej činnosti tok výstupných signálov. Prvkom parametrickej množiny dynamického systému je vždy čas. To znamená, že u dynamického systému okamžitá hodnota výstupu závisí nielen od okamžitej hodnoty vstupu, ale tiež od minulej histórie systému, t.j. dynamický systém má pamäť.

Uvažujme dva deliče nepätia podľa Obr. 9 a, b. Na týchto deličoch definujeme systémy, ktorých premenné sú  $(u_{1a}(t), i_{1a}(t), u_{2a}(t))$  a  $(u_{1b}(t), i_{1b}(t), u_{2b}(t))$ . Parametrom bude v oboch prípadoch čas  $t$ . Ak zvolíme množinu prípustných hodnôt jednotlivých premenných, napr.  $0 \leq u_{1a}(t) \leq 100 \text{ V}$ ,  $0 \leq u_{2a}(t) \leq 100 \text{ V}$ ,  $0 \leq i_{1a}(t) \leq 1 \text{ A}$ ,  $0 \leq u_{1b}(t) \leq 100 \text{ V}$ ,  $0 \leq u_{2b}(t) \leq 100 \text{ V}$ ,  $0 \leq i_{1b}(t) \leq 1 \text{ A}$ , a ak stanovíme rozlišovaci úroveň, napr. presnosť pri meraní prúdov a napätí 1%, a intervaly odčítania hodnôt 0,1 s, definujeme na oboch objektoch zdrojové systémy. Na oboch zdrojových systémoch môžeme definovať orientované generatívne systémy, ktorých chovanie určuje časovo invariantný vzťah medzi vstupom a výstupom.

Vstupmi sú  $u_{1a}(t)$ ,  $u_{1b}(t)$ , resp.  $i_{1a}(t)$  alebo  $i_{1b}(t)$ , výstupmi sú  $u_{2a}(t)$  a  $u_{2b}(t)$ . Pre delič na Obr. 9a platia nasledujúce časovo invariantné vzťahy :

$$u_{2a}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{1a}(t) = R_2 i_{1a}(t)$$

V tomto prípade je okamžitá hodnota výstupného napätia priamo úmerná okamžitej hodnote vstupného napätia. Ide teda o systém bez dynamiky.



Obr. 9 : Príklad statického (a) a dynamického systému (b)

Pre delič na Obr. 9b platia zasa nasledujúce časovo invariantné vzťahy :

$$R_1 i_{1b}(t) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_{1b}(t) dt + U_{C_1}(0) = u_{1b}(t)$$

V tomto prípade je napätie na kondenzátore, ktoré je zároveň rovné aj okamžitej hodnote výstupného napätia systému, závislé jednak na počiatkovej hodnote napätia na kondenzátore v čase  $t = 0$  a tiež na integrále prúdu, ktorý prechádzal kondenzátorom od času  $t = 0$  až do  $t$ . Okamžitá hodnota výstupného napätia závisí od predchádzajúcej histórie systému. Ide teda o systém dynamický. Pre stanovenie hodnoty výstupu pri nejakej rozlišovacej úrovni nemusíme poznať celú históriu systému, ale stačí nám poznať históriu za nejakú dobu  $\Delta t$ , ktorú voláme hĺbka pamäti dynamického systému. V našom prípade by sme sa pri riešení diferenciálnej rovnice presvedčili, že história systému z doby staršej ako  $t - \Delta t$ , kde hodnota  $\Delta t \approx 4\tau = 4 R_1 C_1$ , ovplyvňuje okamžitú hodnotu len veľmi málo (pod 1%).

U systémov definovaných na fyzikálnych objektoch spôsobuje túto závislosť na histórii systému prvky, ktoré akumulujú energiu. Na základe analógie s uvedeným elektrickým obvodom sa in hovorí aj kapacity. Nemusia to samozrejme byť len elektrické kapacity alebo indukčnosti, môžu to byť zotrvačné hmoty alebo momenty zotrvačných síl, nádrže akumulujúce kvapalinu alebo plyn, tepelná zotrvačnosť rôznych hmôt a pod. Dynamický systém však nemusí byť len fyzikálny. Ak budeme napr. sledovať vývoj úspor obyvateľstva v závislosti na veľkosti hrubého národného produktu, závislosť výskytu ochorenia horných ciest dýchacích na percente oxidu siričitého v ovzduší a pod., pôjde tiež o dynamické systémy.

Je dôležité si uvedomiť, že rozhodnutie, či ide o dynamický systém alebo o systém bez dynamiky, je relatívne a závisí často na zvolenej rozlišovacej úrovni. Keby sme odčítali namerané vzorky napätia v intervaloch  $10^{-6}$ s, museli by sme brať do úvahy rozptylové kapacity a indukčnosti použitých odporov a aj systém na Obr. 9a by sa nám javil ako dynamický. Pri dostatočnom zjemnení rozlišovacej úrovne sa každý systém stáva dynamickým systémom. Naopak, žiadny systém si svoje vlastnosti nezachováva nemenné, preto vo veľkých časových merítkach nemôžeme žiadny systém považovať za statický.

Pri definovaní systému sa v podstate uplatnili tieto tri prístupy [7] : kvalitatívny, kybernetický a matematický. Za zakladateľa kvalitatívnej školy je možné považovať Bertalanfyho, ktorý pojem systém definuje nasledovne : "Systém je komplex prvkov nachádzajúcich sa vo vzájomnej interakcii" [19].

Kybernetická teória systémov vychádza z prác Ashbyho. Teória predpokladá existenciu aktívnej riadiacej zložky systému a pasívnej (ovládanej) zložky systému, ktoré sú navzájom prepojené spätnou väzbou, ktorá sprostredkuje riadiacej zložke informácie o úspešnosti riadenia [20]. V matematickej teórii systémov je systém spravidla charakterizovaný ako kartézsky súčin dvoch alebo viacerých množín. Hlavným predstaviteľom tohoto smeru je Mesarovič [21], ktorý systém definuje :

$$\begin{aligned} S &= \{X, R\}, \\ X &= \{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \\ R &= \{R_1, R_2, \dots, R_n\}, \end{aligned} \quad (1)$$

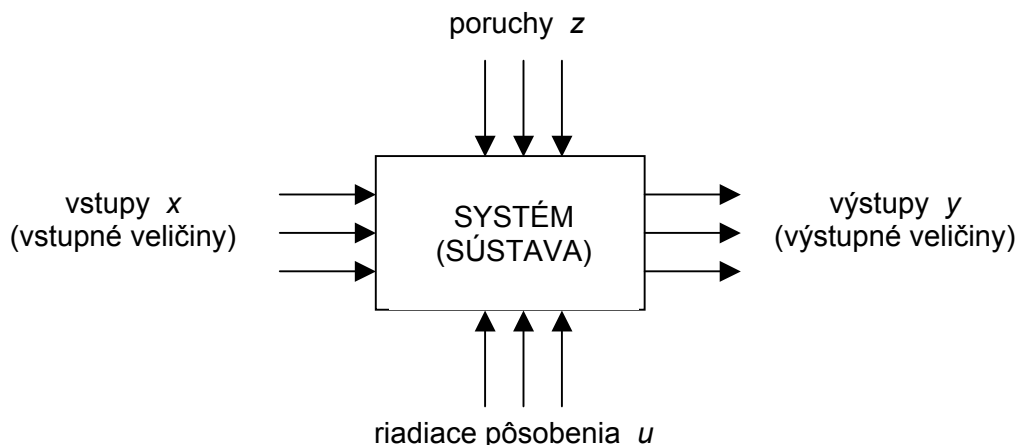
kde

$X_i$  sú neprázdne množiny prvkov a  
 $R_i$  sú neprázdne množiny vzťahov.

Systém pozostáva vždy z usporiadanej množiny prvkov, ktoré majú určité vlastnosti, a medzi ktorými (aj ich okolím) sú určité vzťahy. Systém môže byť súčasne prvkom systému vyššieho rádu a prvok systému môže byť súčasne systémom nižšieho rádu.

Z pohľadu procesov je systém súhrn prebiehajúcich fyzikálno - chemických procesov a tiež aj prostriedkov na ich realizáciu. Systém sa teda skladá z vlastných procesov, zariadenia, v ktorom procesy prebiehajú a zo všetkých prostriedkov na kontrolu a riadenie procesov a spojenia medzi nimi. Všetky tieto časti sú navzájom zviazané a spolupôsobia a v istom zmysle vytvárajú uzavretý celok, lebo inak by ich nebolo možné nazývať systémom.

Každý systém je v styku s okolím prostredníctvom vstupov  $x$  a výstupov  $y$  (Obr. 10). Vstupmi môžu byť napríklad spracovávaná surovina, jej hmotnosť, zloženie, teplota atď. Na systém spravidla pôsobia poruchy  $z$ . Na ich kompenzáciu a tiež preto, aby systém pracoval požadovaným spôsobom, sa používajú riadiace pôsobenia  $u$ .



Obr. 10 : Grafické zobrazenie systému

Aby bolo možné abstrahovať od konkrétnych vstupných a výstupných vlastností produktu a tiež od charakteristík technologického procesu a jeho parametrov, ktoré charakterizujú podmienky činnosti technologického procesu, je nutné konkrétne chemické, fyzikálne a technologické vlastnosti týchto charakteristík neuvažovať. Všeobecnosť teórie automatického riadenia umožňuje vyvinúť systémy riadenia pre rôzne objekty podľa jednotných princípov, berúc do úvahy zvláštnosti týchto objektov len pri projektovaní informačného systému (snímače) a vstupu riadiacich akcií do objektu (akčné členy).

Systém je teda množina prvkov vzájomne na seba pôsobiacich a vykazujúcich cieľové chovanie. Každý systém sa môže skladať z jednotlivých podsystémov, alebo môže byť sám podsystémom svojho nadsystému. U každého systému rozoznávame dve základné vlastnosti, a to chovanie systému a štruktúru systému.

Štruktúra systému je množina relácií (spôsob usporiadania), ktorými sú späté prvky určitého systému (hmotného, energetického alebo informačného). Štruktúru najlepšie znázorňujeme orientovaným grafom - najčastejšie tzv. blokovou schémou, kde ku každému vzťahu (relácii) odpovedá jeden blok a orientovanými spojnicami medzi týmito blokmi je vyjadrená vstupná alebo výstupná úloha jednotlivých

veličín v týchto blokoch (reláciách). Zostavenie blokovej schémy znamená teda nájdenie cesty prenosu informácie systémom a nájdenie miest a spôsobu jej transformácie.

Na začiatku skúmania dokonca ani nemusíme poznať spôsob transformácie informácie vo vnútri bloku. Podľa chovania výstupu môžeme na základe známych vstupov usudzovať o transformácii vo vnútri bloku bez jeho poznania. Takejto metóde skúmania sa hovorí *metóda čiernej skrinky* (black box). Je to metóda kybernetická a patrí medzi významné metódy skúmania systémov. Štvorpól používaný v elektrotechnike na vyjadrenie vlastností lineárnych obvodov je vlastne aplikáciou metódy čiernej skrinky.

Pod kybernetickými metódami teda rozumieme postupy, ktoré používa kybernetika jednak na skúmanie jednotlivých objektov reálneho sveta, vtedy hovoríme o *analýze*, a jednak na návrh nových zariadení a strojov, tzv. *syntéza*. Kybernetických metód existuje celý rad a neustále vznikajú nové. Medzi základné, najpoužívanejšie a dnes už klasické patrí spomínaná *metóda čiernej skrinky* (induktívna) a tiež metóda modelovania založená na poznaní a popísaní dejov v systéme, tzv. deduktívna metóda.

Systémy klasifikujeme podľa viacerých hľadísk [3], [6], [66]. Rozlišujeme napríklad systémy uzavreté a otvorené. *Uzavreté* systémy sú také systémy, ktoré nemajú žiadne vstupy a žiadne výstupy. Sú teda pre svoje okolie uzavreté, t.j. nemenia sa vplyvom okolia. Napríklad latinský jazyk tvorí uzavretý systém, lebo je už "mŕtvym" jazykom a používaním sa nevyvíja ako iné živé jazyky, ktoré patria do skupiny *otvorených systémov*. Vo všeobecnosti platí, že každý uzavretý systém po istom čase degeneruje.

Iným typom systémov sú systémy *prírodné* a *umelé*. Prírodné systémy sú produktom prírody alebo vesmíru, napr. planetárny systém, kým umelé systémy sú dielom človeka, napr. dopravný systém, systém zavlažovania alebo nejaký regulačný systém.

Ďalej systémy delíme na *fyzikálne* a *abstraktné*. Fyzikálne systémy sú také, ktoré reálne existujú, napr. pec, výmenník alebo reaktor. Abstraktné systémy sú také systémy, kde sú určujúce len tie veličiny, ktoré určujú vzťah medzi prvkami systému, alebo vzťah systému k jeho okoliu. Každý fyzikálny systém má abstraktný model, čo však neplatí naopak.

Podľa zložitosti delíme systémy na *jednoduché*, *zložené* a *veľmi zložené*. Podľa determinovanosti delíme systémy zasa na *deterministické* a *stochastické* (pravdepodobnostné) alebo aj ich kombinácie. Podľa dimenzie delíme systémy na *jednorozmerné* a *viacrozmerné*.

*Deterministické systémy* sú také systémy, ktoré majú pevné väzby, tvar apod., a sú jednoznačne určené v čase a priestore (napr. automatická pračka). Deterministický jednorozmerný systém je definovaný na skúmanom objekte tak, aby bola k dispozícii z okolia pôsobiaca vstupná veličina  $u(t)$  a výsledkom tohoto pôsobenia je pozorovateľná, výstupná veličina  $y(t)$ , pričom pri rovnakých začiatkových podmienkach k určitej veličine  $u(t)$  je priradená vždy tá istá veličina  $y(t)$ . Nezávisle premenná je čas. Jednorozmerné systémy sa často označujú skratkou SISO, ktorá je odvodená od anglického označenia "simple input – simple output". Definíciu deterministického jednorozmerného systému je možné jednoducho rozšíriť na deterministický mnohorozmerný systém (MIMO, "multi input – multi output"), ktorého vstupné veličiny sú  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  a výstupné veličiny sú  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$ .

*Stochastické systémy* sú systémy s náhodným správaním, napríklad hracie automaty. Jeho veličiny môžeme určiť len s určitou pravdepodobnosťou.

*Fuzzy systémy* sú také systémy, ktorých množina prvkov nie je jednoznačne definovaná. Nie je isté, že sú prvkami systému a tiež väzby medzi nimi nemusia byť jednoznačne definované

Pre naše účely majú zvláštny význam systémy *kybernetické*, ktoré môžeme deliť napr. podľa ich vzťahu k informácii na systémy pre získavanie, prenos, uchovanie, spracovanie a využitie informácie alebo aj podľa kombinácií týchto činností.

*Spojité systémy* sú také systémy, ktorých vstupné, stavové a výstupné veličiny sú definované v ľubovoľnom čase  $t$ . Teda neexistuje čas, v ktorom by neboli definované (Obr. 13 a). Diskrétné systémy sú také, pri ktorých vstupné, výstupné a stavové veličiny sú definované len v diskrétnych hodnotách nezávislej premennej (Obr. 13 b).

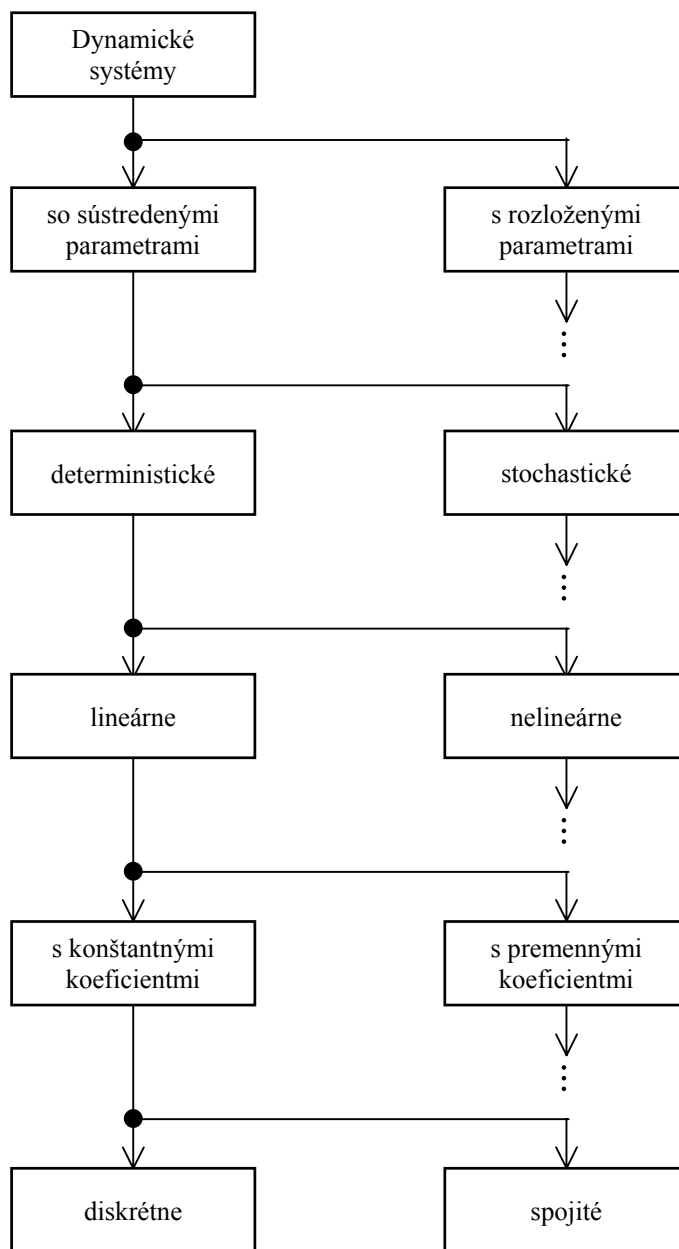
*Systémy so sústredenými parametrami* majú vzťahy medzi vstupnými a výstupnými veličinami popísané pomocou obyčajných diferenciálnych rovníc s deriváciami podľa času. Naproti tomu, *systémy s rozloženými parametrami*, majú vzťahy medzi vstupnými a výstupnými veličinami popísané pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc s deriváciami podľa času a podľa priestorových premenných.

Lineárne systémy sú také systémy, pre ktoré platí zákon superpozície, alebo ktoré majú lineárnu statickú charakteristiku.

Z predchádzajúceho opisu je možné urobiť napr. takú klasifikáciu dynamických systémov, ako je prehľadne uvedená na Obr. 11.

Pre skúmanie systémov je tiež dôležité určiť rozlišovaciu úroveň, na ktorej sa skúmanie bude robiť. Ak budeme napr. skúmať systém asynchrónneho motora, môžeme ho študovať na úrovni jeho vonkajších prejavov, konštrukcie, molekulárnej stavby, atomárnej stavby apod. U niektorých systémov sa uspokojíme s rozlišovacou úrovňou a jej zvýšenie je nežiaduce, u iných zasa opačne.





Obr. 11 : Klasifikácia dynamických systémov a ich modelov

*Model* je izomorfné alebo homomorfné zobrazenie objektu do vybranej účelovej množiny, prenášajúcej adekvátne zobrazeniu i vlastnosti objektu. Model môžeme teda definovať ako zobrazenie podstatných vlastností reálnych systémov, ktoré vo vhodnej forme odráža informáciu o systéme. Vyjadruje alebo imituje chovanie systému.

Klasifikácia modelov sa robí tiež podľa viacerých hľadísk [6], [66]. Modely potom delíme napríklad na : fyzikálne a matematické, analytické a empirické; faktografické a plánovacie; modely funkčné a modely štruktúrne; deterministické a stochastické; spojité a diskkrétne v čase alebo priestore. Ich klasifikácia sa dá urobiť aj analogicky podľa klasifikácie systémov ako je to na Obr. 11. Predmetom nášho záujmu budú hlavne matematické modely objektov alebo systémov, v ktorých sú deje popísané pomocou rôznych druhov rovníc - hlavne diferenciálnych.

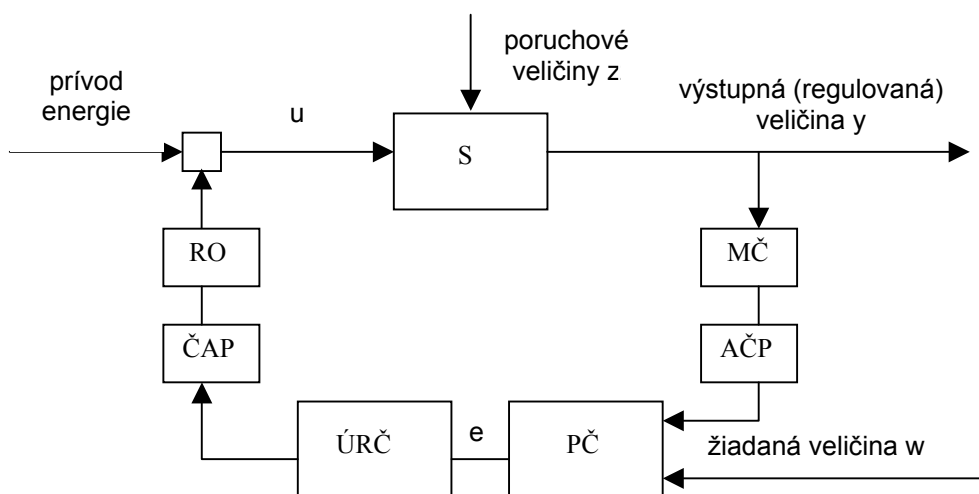
## 1.6 Princíp automatického riadenia

Ako už bolo uvedené, proces riadenia môže byť realizovaný priamou účasťou človeka, ručné riadenie (Obr. 5), alebo bez jeho priamej účasti, automatické riadenie (Obr. 6).

Riadenie je pôsobenie na dynamickú (riadenú) sústavu, ktorým sa dosahuje toho, aby dynamické procesy v sústave a prenosový účinok sústavy boli v súlade s vopred určeným cieľom riadenia pri všetkých očakávaných vstupoch sústavy.

Riadenie je možné chápať ako informačný proces, uskutočňujúci sa v rámci *riadiaceho cyklu* :

- *získavanie informácie* - zadanie cieľa riadenia, určenie skutočného stavu a výstupu sústavy,
- *spracovanie informácie* - určenie odchýlky medzi cieľom a skutočnosťou, rozbor a vyhodnotenie odchýlky, generovanie riadiaceho zásahu,
- *využitie informácie* - fyzikálna realizácia akčného zásahu, pôsobenie akčného zásahu na sústavu, dynamický pochod v sústave v dôsledku pôsobenia zásahu.



Obr. 12 : Principiálna bloková schéma spätnoväzobného riadenia

- MČ - *merací člen* - mení meranú fyzikálnu veličinu (napr. teplotu, tlak apod.) na inú fyzikálnu veličinu, napr. elektrickú, ...
- PČ - *porovnávací člen* - porovnáva, väčšinou odčíta, meranú výstupnú veličinu y od jej žiadanej hodnoty w,
- ÚRČ - *ústredný riadiaci člen* - spracováva zistenú odchýlku e a pôsobí na RO,
- RO - *riadiaci orgán* (aktuátor), ktorý ovláda prívod energie do sústavy,
- AČP - *analogovo-číslícový prevodník* - transformuje spojité signály na nespojité (diskrétné) signály (Obr. 13, Obr. 14),
- ČAP - *číslícovo-analogový prevodník* - transformuje nespojité signály na spojité.

*Regulovaná veličina* – [y] veličina, ktorej hodnota sa reguláciou upravuje podľa daných podmienok (hladiny vody, teploty v peci) sa nazýva regulovaná veličina.

*Skutočná hodnota* – [y] nameraná hodnota na výstupe sústavy.

*Riadiaca veličina* – [w] je veličina, ktorá nastavuje žiadanú hodnotu regulovanej veličiny.

*Regulačná odchýlka* – [e] je rozdiel medzi žiadanou hodnotou a skutočnou hodnotou regulovanej veličiny  $e=w-y$ .

*Akčná veličina* – [u] je výstupná veličina regulátora a súčasne vstupná veličina regulovanej sústavy.

*Poruchová veličina* – [z] sú to poruchy, ktoré pôsobia na sústavu (zmena teploty okolia apod.).

Základné delenie signálov je na spojité a diskrétné. Zatiaľ čo *spojitá veličina* (Obr. 13 a), fyzikálne reprezentovaná spojitým signálom, je takou funkciou času, ktorá v každom časovom okamihu

$$t \in \langle t_0, t_z \rangle \subset R_1 \quad (2)$$

môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu

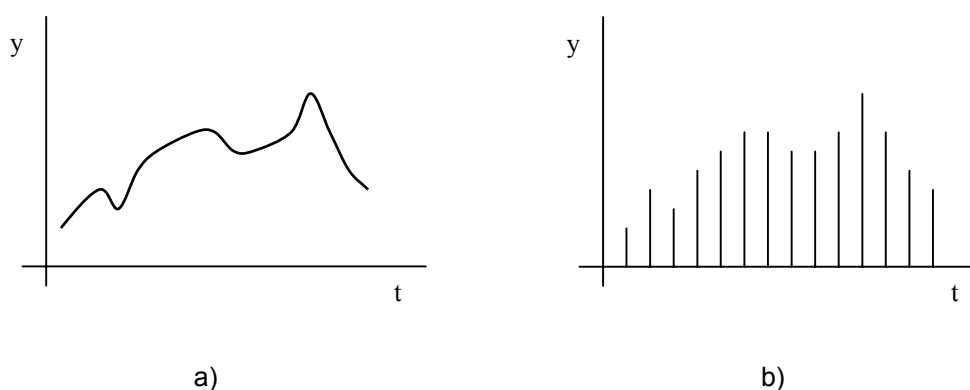
$$y = y(t) \in \langle y_0, y_m \rangle \subset R_1 \quad (3)$$

*diskrétny signál* (Obr. 13 b) je postupnosť hodnôt (funkcia diskrétného argumentu), ktorá len pre daný časový okamih

$$t_k \in \langle t_0, t_z \rangle \subset R_1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu

$$y = y(t_k) \in \langle y_0, y_m \rangle \subset R_1 \quad (5)$$



Obr. 13 : Základné typy signálov

V súvislosti s použitím analógovo – číslicových a číslicovo – analógových prevodníkov v regulačných obvodoch s číslicovým počítačom sa v takýchto diskrétnych systémoch regulácie vyskytujú *kvantované diskkrétne signály* (Obr. 14), reprezentované postupnosťou hodnôt, ktorá pre daný časový okamih

$$t_k \in \langle t_0, t_z \rangle \subset R_1, k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

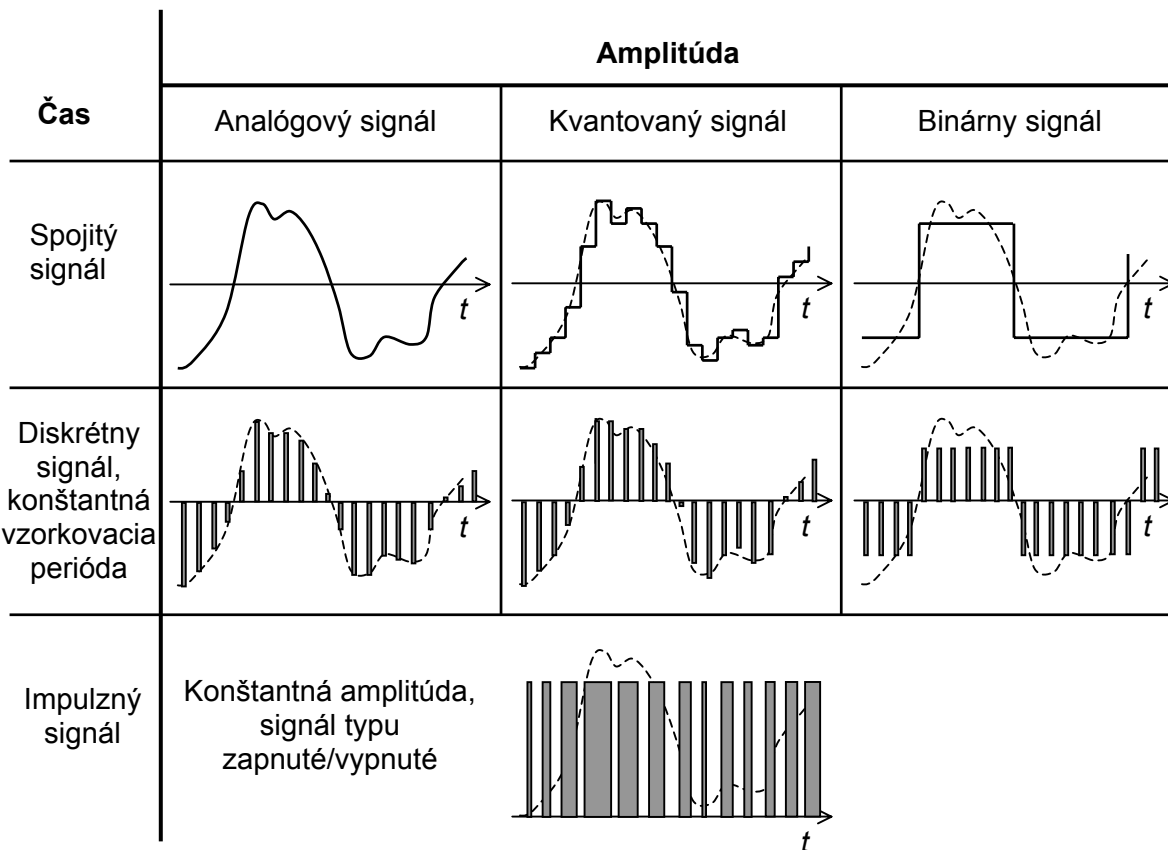
môže nadobúdať hodnotu

$$y = y_h(t_k) \in \langle y_0, y_m \rangle \subset R_1, h = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

z konečnej množiny funkčných hodnôt.

*Impulzné signály* (Obr. 14) sú väčšinou výstupné signály z riadiacich orgánov, ktoré riadia objekty (napr. prívod energie) len v občasných, nepravidelných časových intervaloch. V týchto intervaloch je riadiaca veličina vždy rovnako veľká a po nich je riadiaca veličina nulová. Sú to tzv. systémy typu zapni/vypni. Obidva intervaly bývajú rôznej dĺžky a sú odvodené od skutočnej a požadovanej hodnoty výstupnej veličiny. Sú často používané na riadenie procesov, kde sú malé zmeny, napr. chemické procesy, procesy ohrevu a ochladzovania - napríklad žehličky, bojler, chladničky apod. *Binárne signály* sú používané väčšinou v logických obvodoch.

Zatiaľ čo z hľadiska praktickej aplikácie sa predpokladá zanedbateľný vplyv efektu kvantovania na dynamické deje v systéme, skutočnosť, že hodnoty signálu sa menia len v diskrétnych časových okamihoch podstatne mení dynamiku systému, vyžaduje osobitné metódy analýzy a syntézy, o ktorých bude pojednávané inde.



Obr. 14 : Podrobnejšia klasifikácia typov signálov

Jednou z podmienok zavádzania stavebnicových riadiacich systémov je *unifikácia* (zjednotenie) signálov, uskutočňujúcich prenos informácií medzi jednotlivými funkčnými celkami. Elektrické regulačné systémy využívajú nasledujúce napätia a prúdy :

*Prúdové signály* – k diaľkovému prenosu, napr. 0 až 20 mA, 4 až 20 mA.

*Napätové signály* – k prenosu vnútorných častí, napr. 1 až 10 V.

U pneumatických regulačných systémoch sa používa unifikovaný signál 20–100 kPa.

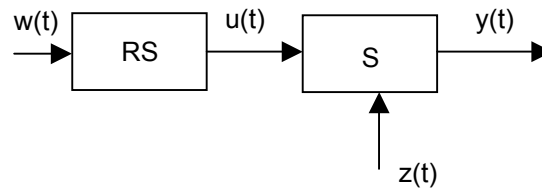
*Riadiaci obvod* je tvorený riadenou dynamickou sústavou, riadiacim zariadením a prepájovými cestami (Obr. 12). V princípe sú možné dve *základné zapojenia* riadiaceho obvodu : *otvorený riadiaci obvod* a *uzavretý (spätnoväzobný) riadiaci obvod*. Ich používanie bolo zavádzané v uvedenom poradí a súviselo so stupňom dosiahnutých podmienok pre automatizáciu. Zodpovedajúco sa aj hovorí o *automatickom ovládaní*, *programovom riadení* alebo *doprednom riadení* (feed-forward control), o *automatickej regulácii* a o *automatickom riadení*. *Riadenie* je spoločný názov pre *ovládanie* a *reguláciu*.

A) *Otvorený (ovládaci) riadiaci obvod* (Obr. 15) sa používa v prípadoch, ak vplyv porúch  $z(t)$  na riadený objekt je zanedbateľný. Algoritmus riadenia má tvar

$$u(t) = A[w(t)], \quad t \in \langle t_0, t_z \rangle \tag{8}$$

Operátor  $A$  predstavuje súhrn matematických operácií, ktoré je potrebné realizovať, aby sme z funkcie  $w(t)$  našli funkciu  $u(t)$  takú, ktorá nám zabezpečí výstupnú funkciu  $y(t)$  veľmi blízku jej požadovanej hodnote  $w(t)$ . Hodnota výstupnej veličiny  $y(t)$  sa však nekontroluje on-line. Nájdenie operátora  $A$  si vyžaduje dostatočnú množinu apriórnych informácií o riadenom systéme  $S$  ako aj o vzájomnej závislosti medzi jednotlivými veličinami systému. Ako príklad môžeme uviesť programové riadenie obrábacích strojov. K otvoreným systémom riadenia patria aj tzv. systémy s programovým ovládaním, pričom program riadenia môže byť pevný alebo nastaviteľný. Do tejto

skupiny patria napr. automatické pračky, ovládania signálnych svetiel semaforov, predajné automaty apod. Systémy s programovým ovládaním môžu mať zložitú konštrukciu a realizovať zložité riadiace funkcie. Ich princíp činnosti je špecifický a matematicky sú popísané väčšinou pomocou teórie konečných automatov.

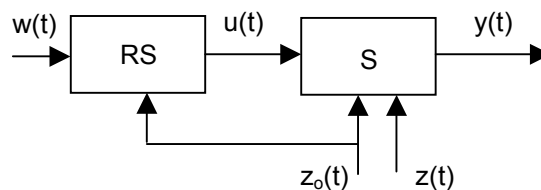


Obr. 15 : Bloková schéma ovládania

- B) Ďalšia možná alternatíva otvoreného riadiaceho obvodu je otvorený *kompensačný riadiaci obvod*. Takýto riadiaci obvod sa používa v prípadoch, keď je možné merať niektorú z vplyvných poruchových veličín  $z_o(t)$  a keď vieme určiť jej vplyv na výstupnú veličinu  $y(t)$ , a potom aj určiť závislosť veličiny  $u(t)$  aj od tejto poruchy

$$u(t) = A[w(t), z_o(t)], \quad t \in \langle t_0, t_z \rangle \quad (9)$$

Operátor  $A$  je väčšinou možné rozdeliť na dve nezávislé časti, pričom časť  $A_z$ , týkajúca sa merateľnej poruchy  $z_o(t)$  sa často označuje ako *kompenzátor*. Časť  $A_w$ , týkajúca sa žiadanej hodnoty  $w(t)$  má rovnakú funkciu ako v predošlom prípade.



Obr. 16 : Bloková schéma kompenzačného riadenia

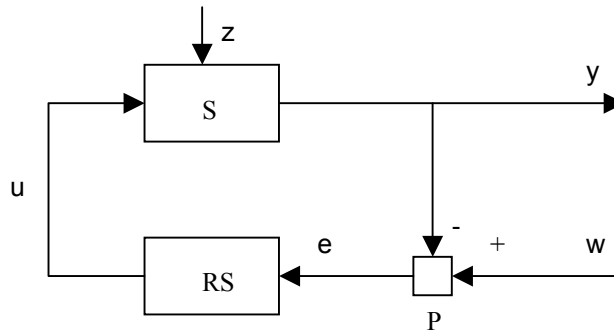
Vlastnosti riadenia s kompenzátorom :

- riadenie s kompenzátorom je odvodené iba od kompenzovanej poruchy, teda obvod môže odstrániť iba vplyv tejto poruchy - *funkčná selektívnosť*,
- riadiaci zásah sa vyvolá hneď pri vzniku poruchy  $z_0$ , teda skôr ako sa jej vplyv prejaví na výstupe  $S$  - *neoneskorené pôsobenie*,
- neexistuje spätná väzba - ani autonómne dynamické pochody v systéme.

Výhodou otvorených systémov riadenia s meraním a kompenzáciou poruchy je ich rýchlosť, lebo kompenzujú vplyv danej poruchovej veličiny skôr, ako sa prejaví na výstupe riadeného systému. Príkladom otvorených systémov riadenia s meraním poruchy a prípadne kompenzáciou poruchy môže byť regulácia teploty v miestnosti. Časť  $A_w$  zabezpečuje požadovanú teplotu vykurovanej miestnosti bez vplyvu porúch. Časť  $A_z$  zase na základe údajov o vonkajšej teplote, ktorá je poruchovou veličinou, kompenzuje jej nežiadúce vplyvy. Iným príkladom je aj regulátor predstihu u automatických rozdeľovačov. Predstih sa nastavuje na základe nelineárnej funkcie uhlovej rýchlosti stanovenej na skúšobni pre optimálnu činnosť motora - časť  $A_w$ .

Otvorené riadiace systémy majú teda svoju oblasť použitia. Ich základným nedostatkom však je, že riadiaci systém nedostáva späť informácie o tom, či správanie riadeného systému zodpovedá želaným požiadavkám. Ďalším nedostatkom tohoto typu riadenia môže byť to, že pri poruche v riadenom systéme môže dôjsť k nežiadúcej činnosti, pretože tok riadiacich povelov zostáva často neprerušovaný. Tomu je však možné predísť napríklad pomocou doplňujúcej kontroly a tiež riadením pomocou kombinačnej alebo sekvenčnej logiky.

- C) *Uzavretý riadiaci obvod (spätnoväzobný regulačný obvod) (Obr. 17) sa od otvoreného riadiaceho systému líši spätnou väzbou medzi riadeným a riadiacim systémom.*



Obr. 17 : Bloková schéma regulácie

S - je riadená sústava, RS - riadiace zariadenie (systém), P - porovnávací člen, y - riadená veličina, w -riadiaca veličina (žiadaná hodnota y), z - porucha, u - akčná veličina, e - regulačná odchýlka.

Spätnou väzbou dostáva riadiaci systém priebežnú informáciu o stave a výstupe riadeného systému, a tým aj o účinnosti riadenia. Spätná väzba dáva informácie o súhrnnom pôsobení riadiacich veličín  $w(t)$  spolu aj s pôsobením všetkých poruchových veličín  $z(t)$ . Riadiace pôsobenie  $u(t)$  je závislé na žiadanej hodnote  $w(t)$  a riadenej veličine  $y(t)$ , teda

$$u(t) = A[w(t), y(t)], \quad t \in \langle t_0, t_z \rangle \quad (10)$$

V uzavretom systéme riadenia sa teda bezprostredne meria riadená veličina  $y(t)$ , ktorá zahrňuje aj vplyv poruchových veličín  $z(t)$ . Z toho dôvodu pri vytváraní riadiacej veličiny  $u(t)$  sa vždy zohľadňuje i vplyv poruchových veličín. V tom je výhoda uzavretých systémov riadenia.

Vlastnosti :

- riadiaci zásah je odvodený iba od riadiacej a riadenej veličiny, preto obvod znižuje účinok všetkých vonkajších porúch a vnútorných zmien riadiacej sústavy - *globálnosť pôsobenia*,
- riadiaci zásah je vyvolaný iba po vzniku odchýlky (vplyvom porúch, ... ) - *oneskorené pôsobenie*,
- spätná väzba - autonómne procesy, z čoho vyplýva možná *kmitavosť* až *nestabilita* takého systému riadenia,
- selektívne pôsobenie - na  $u$ , z malá citlivosť, na  $y$ ,  $w$  stredná citlivosť a na  $e$  vysoká citlivosť.

Teda zavedením spätnej väzby môžu u takýchto systémov v niektorých prípadoch vzniknúť netlmené kmity, ktoré môžu zapríčiniť aj nefunkčnosť systému riadenia, ako to podrobnejšie uvidíme pri vyšetrovaní stability.

Riadiace pôsobenie  $u(t)$  sa najčastejšie vytvára na základe rozdielu žiadanej hodnoty  $w(t)$  od riadenej veličiny  $y(t)$ , teda na základe regulačnej odchýlky

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (11)$$

Algoritmus riadenia je potom možné zapísať v tvare

$$u(t) = A[e(t)], \quad t \in \langle t_0, t_z \rangle \quad (12)$$

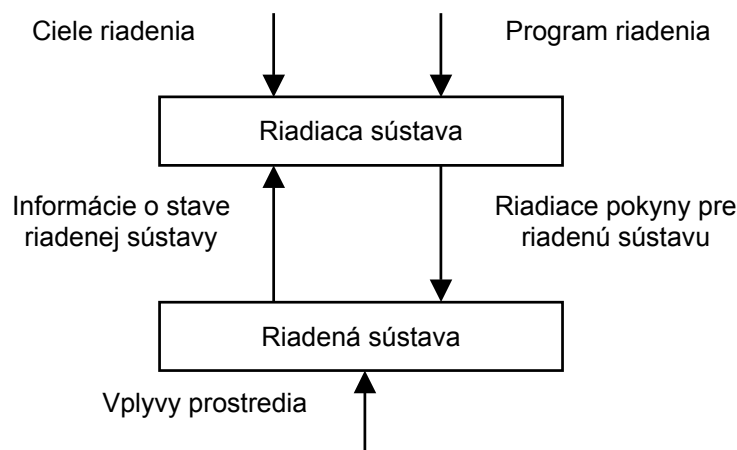
Využitím spätnej väzby sa podstatne zvyšuje kvalita riadenia v porovnaní s otvorenými systémami riadenia najmä v podmienkach náhodných poruchových pôsobení. Pri riadení sa preto častejšie uplatňujú uzavreté systémy riadenia. Niektoré príklady sú uvedené napríklad aj v nasledujúcej podkapitole. Je možná kombinácia uvedených štruktúr. Efektívnosť činnosti kombinovaných systémov riadenia je vždy väčšia ako efektívnosť systémov riadenia, z ktorých je zložená [70].

Ako už bolo uvedené, pri regulácii sa riadiace pôsobenie vytvára v dôsledku porovnávania skutočnej hodnoty riadenej veličiny  $y(t)$  s jej požadovanou hodnotou  $w(t)$ . Regulácia je teda udržiavanie nejakej riadenej veličiny  $y(t)$  na požadovaných hodnotách, ktoré sú buď konštantné, alebo sa s časom menia podľa vopred stanovených požiadaviek. Charakteristickým znakom regulácie, ako špeciálneho prípadu riadenia, je eliminácia odchýlok regulovanej veličiny od jej žiadanej hodnoty.

- D) *Automatické riadenie* (Obr. 18) chápeme širšie ako len reguláciu. Úlohou automatického riadenia je tiež samočinné pôsobenie určitými pokynmi podľa vloženého programu na riadenú sústavu za účelom dosiahnutia určitého cieľa, napríklad zabezpečenie platnosti rovnice

$$y(t) = w(t) \quad (13)$$

Riadiaci systém dostáva informácie z riadenej sústavy, porovnáva získané hodnoty s ich požadovanými hodnotami, s cieľmi riadenia, a na základe vloženého algoritmu riadenia (programu riadenia) vytvára také riadiace pôsobenia na riadenú sústavu, aby sa splnili ciele riadenia a eliminovali nežiadúce vplyvy okolia. Môžu sa aj samočinne prispôbovať zmenám podmienok svojej činnosti.



Obr. 18 : Bloková schéma automatického riadenia

Základnou úlohou systémov riadenia je realizácia automatického riadenia vo forme *automatizovaných systémov riadenia technologických procesov* (AS RTP). AS RTP tvorí komplex technického a programového vybavenia, určeného na realizáciu nasledovných činností : zber, prenos a spracovanie informácie o stave riadeného objektu, rozhodovanie o zmenách akčných veličín, ktoré zabezpečujú realizáciu cieľov, realizácia riadenia systému ako aj dokumentácia priebehu akčných a stavových veličín. Tieto činnosti vykonávajú zodpovedajúce podsystémy AS RTP.

Riadenie sme už definovali ako cieľavedomú činnosť. Pri riadení je teda dôležitý *subjekt riadenia*, ktorý je zdrojom cieľov riadenia, a ktorý musí systém riadenia realizovať. Subjektom môže byť jeden človek alebo aj skupina ľudí, ktorí sú združení podľa nejakých príznakov, alebo pri niektorých cieľoch to môže byť aj celé ľudstvo, keď sa riešia napríklad problémy globálnych systémov ako napríklad životné prostredie, kozmický priestor apod.

Ciele vznikajú u subjektu pod vplyvom jeho vlastných potrieb, ktoré súvisia s jeho životnou činnosťou, s riadeným systémom a okolím. Ak správanie riadeného systému vyhovuje potrebám subjektu, tak nijaké riadenie nie je potrebné. Ale ak správanie riadeného systému z akýchkoľvek dôvodov nevyhovuje subjektu, tak je potrebné robiť také pôsobenie na riadený systém, aby sme požadované správanie dosiahli. Subjekt teda vytvára ciele riadenia iba v tom prípade, ak správanie riadeného systému nevyhovuje jeho požiadavkám, ináč nie. Ciele môžu byť často aj protirečivé. Potom je nutné pristúpiť k najvhodnejším kompromisom, ktoré sa môžu robiť napríklad rôznymi metódami optimalizácie. V rámci riešenia protirečivosti cieľov určitých skupín ľudí sa však aj v dnešnej dobe používajú silové metódy, právo silnejšieho.

Cieľ riadenia môže byť rôzne, napríklad :

- a) determinovaný :
  - časovo nepremennivý s úzkou oblasťou prípustných hodnôt (*stabilizácia*),
  - časovo nepremennivý so širokou oblasťou prípustných hodnôt (*obmedzovanie*),
  - premenlivý s časom (*programové riadenie*),
  - premenlivý v závislosti od priestorovej súradnice (*kopírovanie*);
- b) vopred neurčený, vytváraný je iba v priebehu riadiaceho procesu (závislé riadenie) :
  - riadiaci obvod reprodukuje náhodný vstupný signál na vyššej energetickej úrovni (*servomechanizmy*),
  - riadiaci signál je odvodený od výstupného signálu inej, nezávislej dynamickej sústavy (*vlečné riadenie*),
  - riadiaci signál sa získava v procese riadenia aktívnym informačným procesom, zameraným na zisťovanie parametrov nezávislého objektu (*sledovače*, napr. radarové);
- c) odvodený z činnosti vlastného riadiaceho obvodu :
  - cieľ sa určí z extrémnej funkcie, odvodený od stavových alebo výstupných veličín (*extremálne riadenie*),
  - adaptívne riadenie.

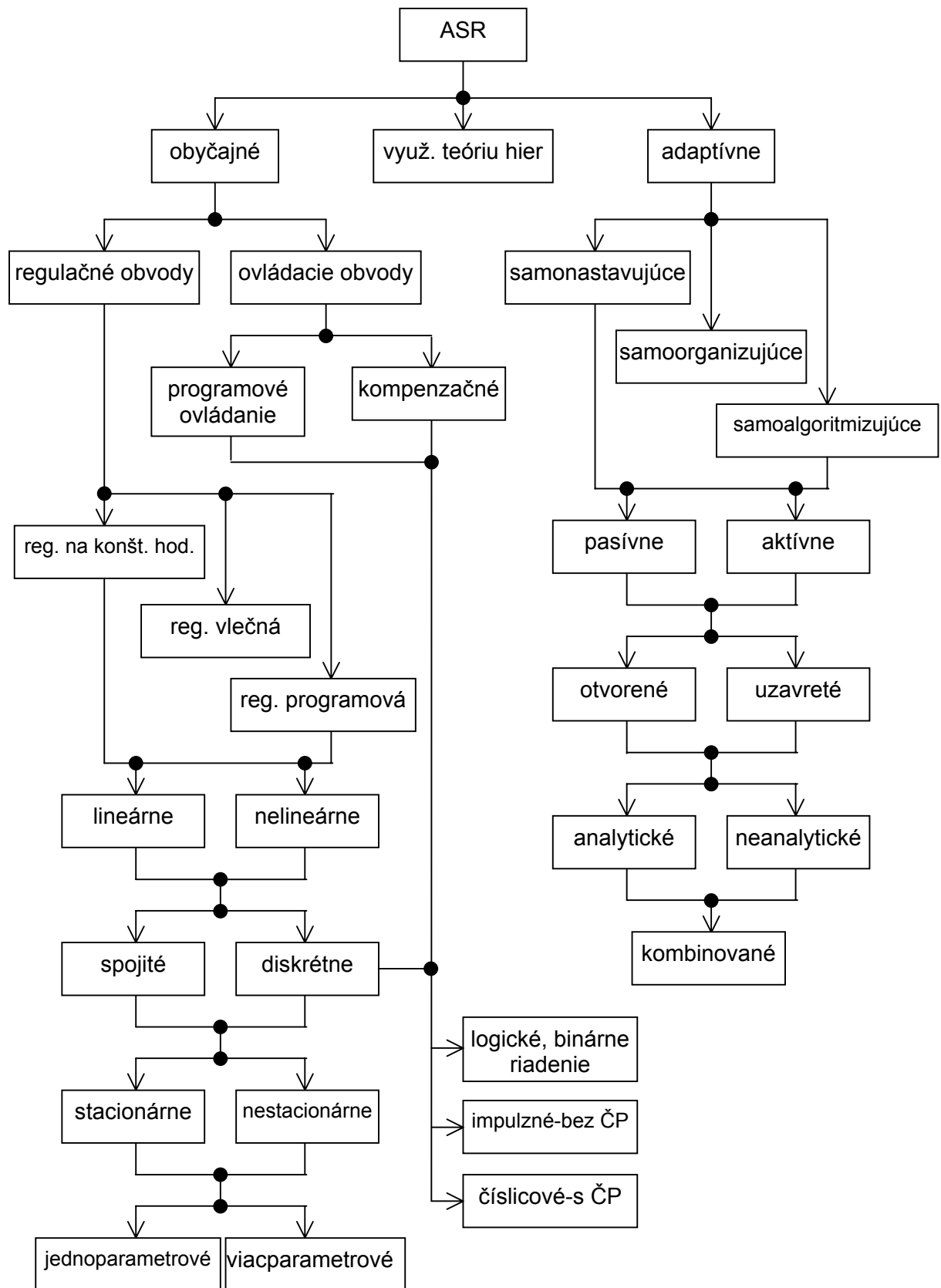
Podľa cieľov riadenia, podľa množstva apriórnych informácií o systéme, podľa typu vstupných, stavových a výstupných signálov (Obr. 13, Obr. 14) v riadenom systéme alebo aj v ďalších prvkoch riadiaceho obvodu je možné riadiace systémy klasifikovať napríklad tak, ako je to uvedené na (Obr. 19).

Počiatočnou informáciou pre ďalšie účely rozumieme súbor údajov o riadenom procese, ktorý je známy do začatia procesu. Podľa množstva počiatočnej informácie je možné ASR rozdeliť na obyčajné, adaptívne a systémy využívajúce teóriu hier. Systémy obyčajné - neadaptívne sú také, ktoré pracujú s úplnou počiatočnou informáciou. To znamená, že ide o prípady, kedy sa v priebehu riadenia zloženie obvodu, jeho parametre ani algoritmy riadenia nemenia. Tieto systémy delíme na ovládacie a regulačné obvody. Ovládacie obvody je taký ASR, v ktorom sa bezprostredný účinok riadenia neporovnáva s očakávaným výsledkom. V tomto zmysle je možné ovládacie obvody považovať za otvorené. Druhým základným typom ASR sú regulačné obvody, ktoré patria do skupiny uzavretých obvodov a tie budú predovšetkým predmetom nášho ďalšieho štúdia.

Jednparametrové (jednorozmerné) riadenie sa týka jednej riadenej veličiny, kým viacrozmerné riadenie sa týka dvoch alebo viacerých riadených veličín. Členenie riadenia (riadiacich systémov) na spojité, nespojité a diskkrétne, so sústredenými alebo rozloženými parametrami, je analogické ako to bolo u dynamických systémov a ich modelov (Obr. 11). Nespojité označujeme také riadenie, kde závisle premenné sú spojité a nezávisle premenné (čas, priestor) sú nespojité. Pri diskrétnom riadení sú závisle premenné, nezávisle premenné aj stavové veličiny sú nespojité. Uvedená klasifikácia samozrejme nie je úplná.

Hierarchická štruktúra ASRTP zodpovedá organizačnej štruktúre technologického systému (organizačným stupňom, úrovňami), kde najvšeobecnejšie rozhodovanie (napr. o množstve a kvalite výroby), ktoré prebieha na najvyššej úrovni riadenia, musí byť postupne na nižších stupňoch prevedené na detailnejšie príkazy až na najnižšiu úroveň. Každá úroveň má svoje špecifické ciele, činnosti, metódy, veličiny a modely. Líšia sa ako množstvom priamo meraných veličín, intervalmi riadenia, tak aj komunikáciou s nadriadenou a podriadenou úrovňou. Vzhľadom na veľké množstvo zbieraných, uchovávaných a vyhodnocovaných informácií je realizácia ASRTP nemožná bez aplikácie modernej výpočtovej techniky prepojenej rôznymi typmi počítačových sietí. Počet počítačov, spôsob ich prepojenia ako aj rozdelenie jednotlivých funkcií na jednotlivé počítače závisí najmä od zložitosti ASRTP a zákonite sa tieto koncepcie vyvíjajú a menia aj s rozvojom výpočtovej a komunikačnej techniky.





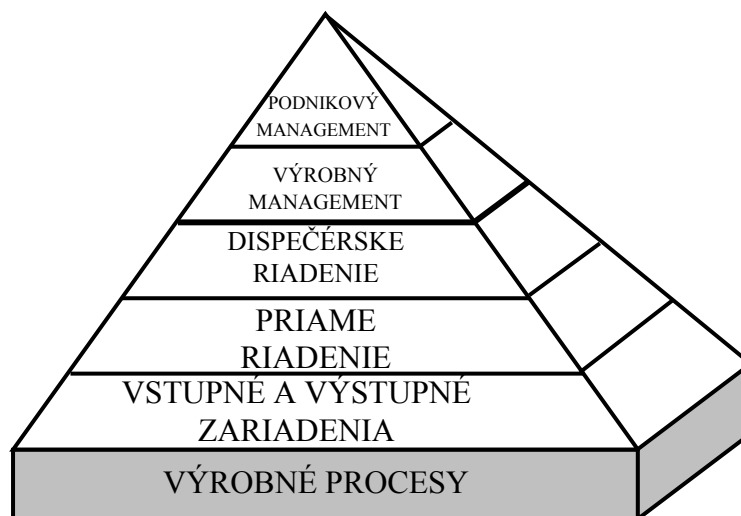
Obr. 19 : Klasifikácia ASR

Rozlišujeme dve základné typy počítačových riadiacich systémov :

- a) centralizované počítačové riadiace systémy, väčšinou len s jedným počítačom,
- b) distribuované počítačové riadiace systémy, alebo decentralizované, ktoré pracujú s viacerými počítačmi, z ktorých časť je distribuovaná v blízkosti riadených zariadení a časť je centralizovaná.

Dominujúce sú samozrejme distribuované počítačové riadiace systémy najmä z dôvodu stále klesajúcej ceny zariadení, z dôvodu vyššej bezpečnosti a zameniteľnosti počítačov medzi sebou napríklad aj v prípade poruchy.

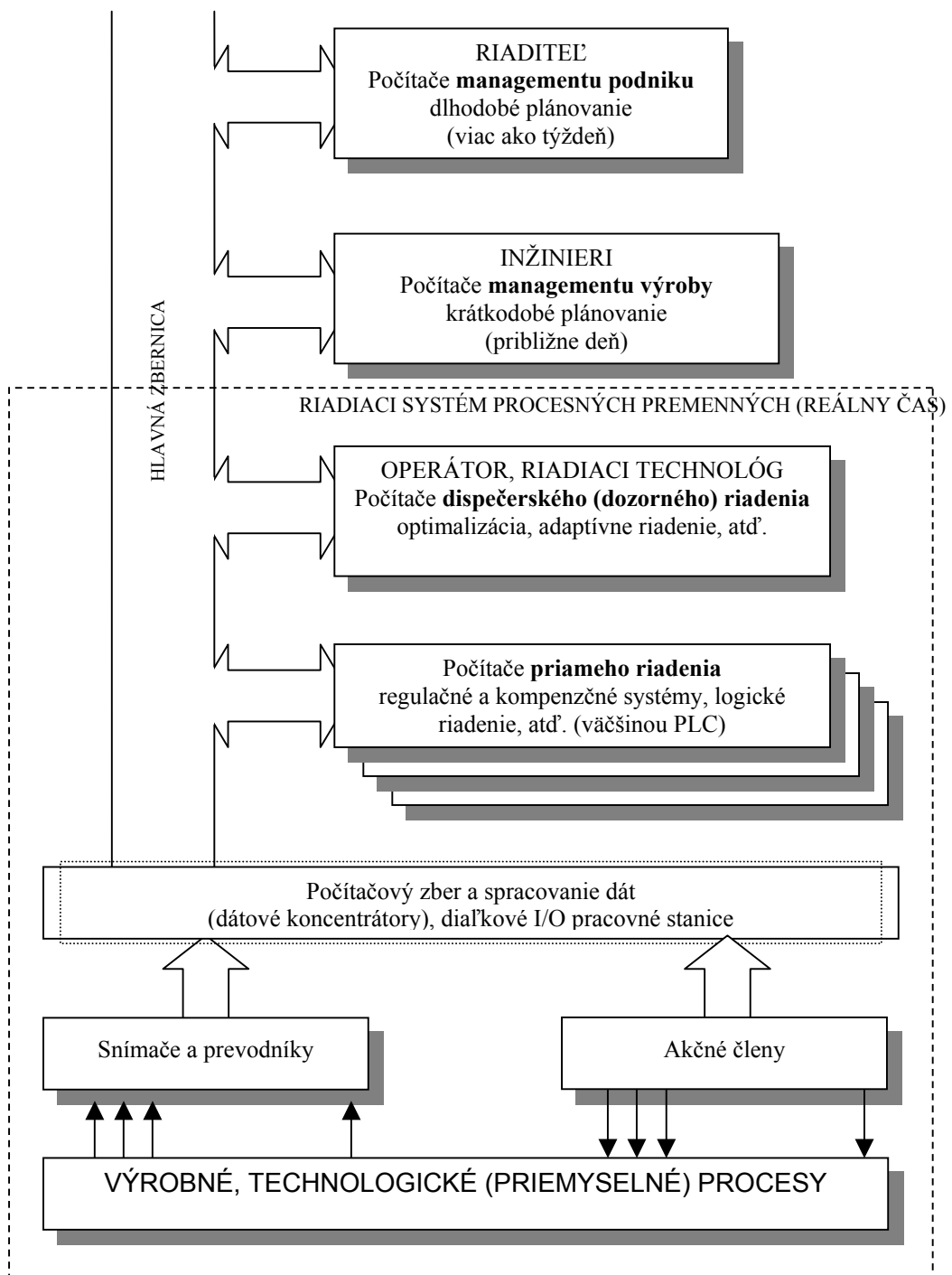
Takéto systémy si vyžadujú širokopásmové zbernice na prenos všetkých informácií. Všeobecná schéma distribuovaných, hierarchických riadiacich systémov je zobrazená na Obr. 21. Ďalšou črtou distribuovaných systémov je ich hierarchičnosť, viaúrovňovosť. Štruktúra distribuovaných a hierarchických systémov sa graficky zobrazuje väčšinou v tvare pyramídy (Obr. 20).



Obr. 20 : Pyramídová štruktúra úrovní riadenia

Technologické procesy predstavujú prvotnú úroveň výroby materiálnych statkov. Zabezpečujú výrobu produkcie nevyhnutnú pre existenciu spoločnosti. V hierarchickej štruktúre riadenia výroby sa aj riadenie technologických procesov nachádza na najnižšom stupni a zabezpečuje žiadané množstvo a kvalitu produkcie ako aj splnenie iných ukazovateľov výroby. Ich žiadanú funkciu je v súčasnosti možné zabezpečiť len s použitím súčasných, moderných systémov riadenia technologických procesov a túto funkciu nemôžu kompenzovať vyššie stupne riadenia, ktoré by to robili neefektívne.

Teda na najnižšej úrovni je úroveň priameho riadenia s najväčším počtom počítačov, väčšinou PLC – tzv. programovateľnými logickými regulátormi alebo aj sekvenčnými regulátormi, ktoré sú priamo spojené s objektom, alebo sú prepojené pomocou koncentrátorov. Nad touto úrovňou je úroveň dozorného (kontrolného) riadenia, na ktorej môžeme rozoznať úroveň sekvenčného riadenia napríklad skupiny strojov ako aj úroveň adaptívneho a optimálneho riadenia. Na vrchole pyramídy je úroveň operatívneho riadenia výroby a úroveň manažérskeho riadenia.



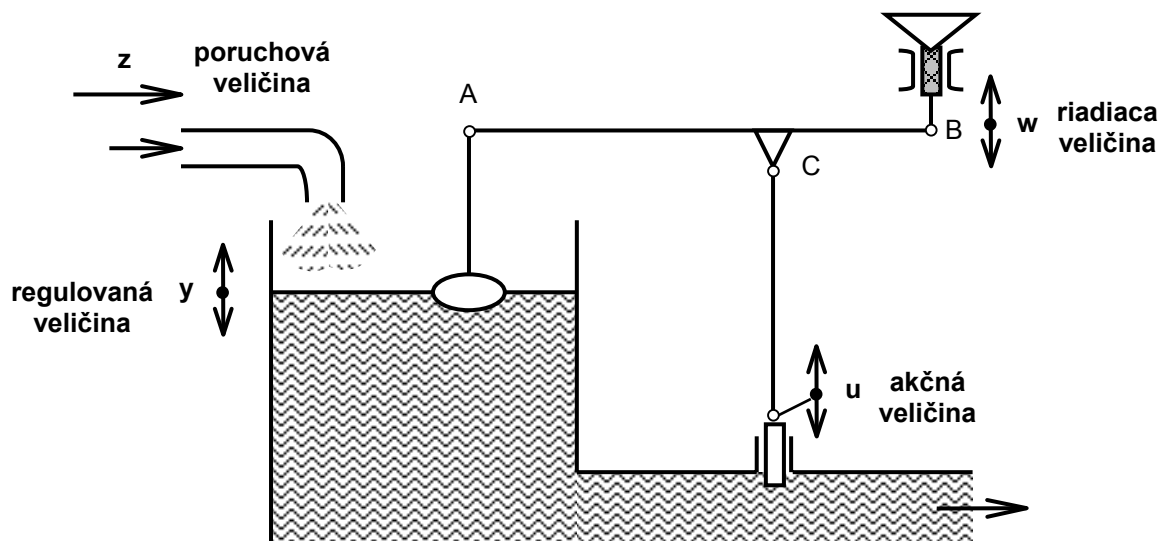
Obr. 21 : Distribuované a hierarchické systémy

## 1.7 Príklady jednoduchého automatického riadenia

Príklady automatického riadenia je možné uviesť veľmi veľké množstvo z rôznych oblastí, či už ide o riadenie v technických systémoch, alebo riadenie ekonomických, spoločenských a biologických systémov. My sa zameriame hlavne na technické systémy, ale z dôvodu uvedomenia si širších súvislostí uvedieme aj príklad jednoduchého ekonomického a biologického systému.

Obrázky uvedených príkladov budú skôr schematické, ku niektorým budú uvedené aj blokové schémy riadenia, prípadne to budú automatizačné schémy. Schematické obrázky umožnia lepšie pochopenie podstaty funkcie samotného riadeného zariadenia a aj funkcie jeho riadenia. Pre kreslenie automatizačných schém sú vypracované normy, ktoré sú obsahom iného predmetu. Z priestorových dôvodov sú však uvedené obrázky kreslené zjednodušene, čo ale neuberá na ich zrozumiteľnosť.

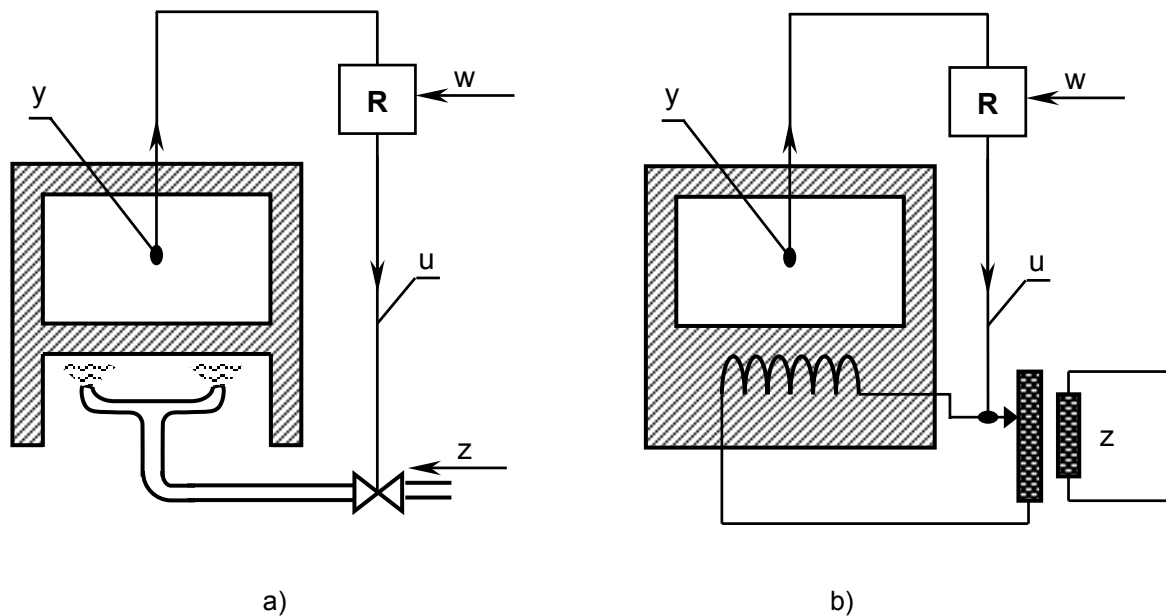
Na Obr. 22 je nakreslená schéma regulácie výšky hladiny. Regulovanú veličinu  $y$  predstavuje výška hladiny v nádrži. Na zmenu výšky hladiny pôsobia poruchové veličiny  $z_1, z_2, \dots$  predstavované napr. nerovnomernosťou prítoku a odtoku. Výška hladiny je meraná plavákom a jej hodnota sa prenáša pomocou pák do regulátora ako skutočná hodnota v danom čase. Žiadaná hodnota  $w$  sa nastavuje pomocou riadiaceho člena. Akonáhle vznikne rozdiel medzi skutočnou a požadovanou hodnotou, napríklad zmenou prítoku stúpne hladina v nádrži, otvára sa účinkom akčnej veličiny  $u$  ventil až do vyrovnania regulovanej veličiny na požadovanú - riadiacu veličinu. Tento pochod sa uskutoční aj v opačnom zmysle, keď hladina v nádrži poklesne.



Obr. 22 : Schéma regulácie výšky hladiny

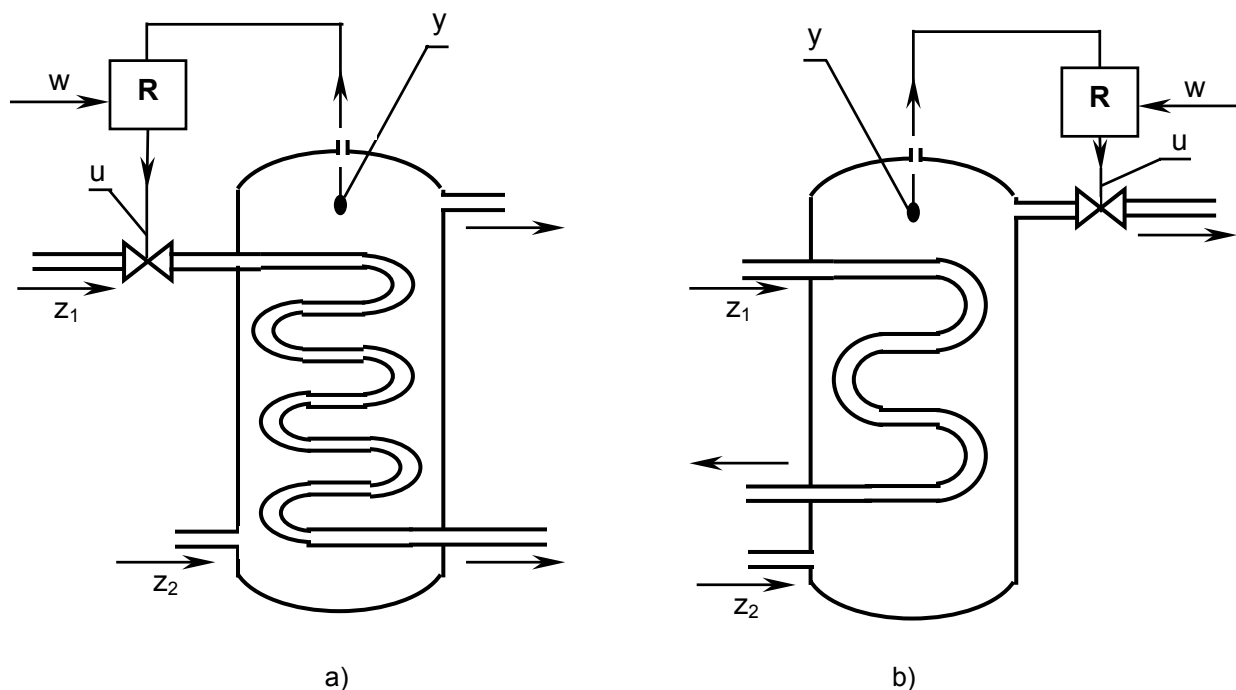
Z obrázku je vidieť, že jednotlivé členy obvodu sú medzi sebou určitým spôsobom viazané. Tak napr. zmena regulovanej veličiny  $y$  pôsobí na regulátor, ten cez akčnú veličinu  $u$  pôsobí na polohu kuželníka ventilu, a tá zase pôsobí na zmenu odtoku, teda aj spätne na výšku hladiny. Zmena výšky hladiny opäť ovplyvňuje regulátor a celý regulačný pochod sa opakuje v uzavretej slučke. Táto schéma teda predstavuje jednoduchý regulačný obvod.

Na Obr. 23 je príklad regulácie teploty v priemyselných peciach, a) palivovej, b) elektrickej. Regulovanou veličinou  $y$  je teplota pracovného priestoru pece, ktorá sa meria napr. termočlánkom. Akčná veličina  $u$  spôsobuje v prípade palivovej pece prestavovanie ventilu v prívoде plynu alebo naftového potrubia. V prípade elektrickej ohrievacej pece je regulácia teploty zabezpečovaná buď zmenou polohy bežca na sekundárnej strane regulačného transformátora, alebo zmenou otvorenosti tyristora, čo v oboch prípadoch zabezpečuje akčná veličina regulátora  $u$ . Poruchovou veličinou  $z$  je napr. kolísanie výhrevnosti paliva, kolísanie napätia rozvodnej elektrickej siete apod.



Obr. 23 : Regulácia teploty v priemyselných peciach

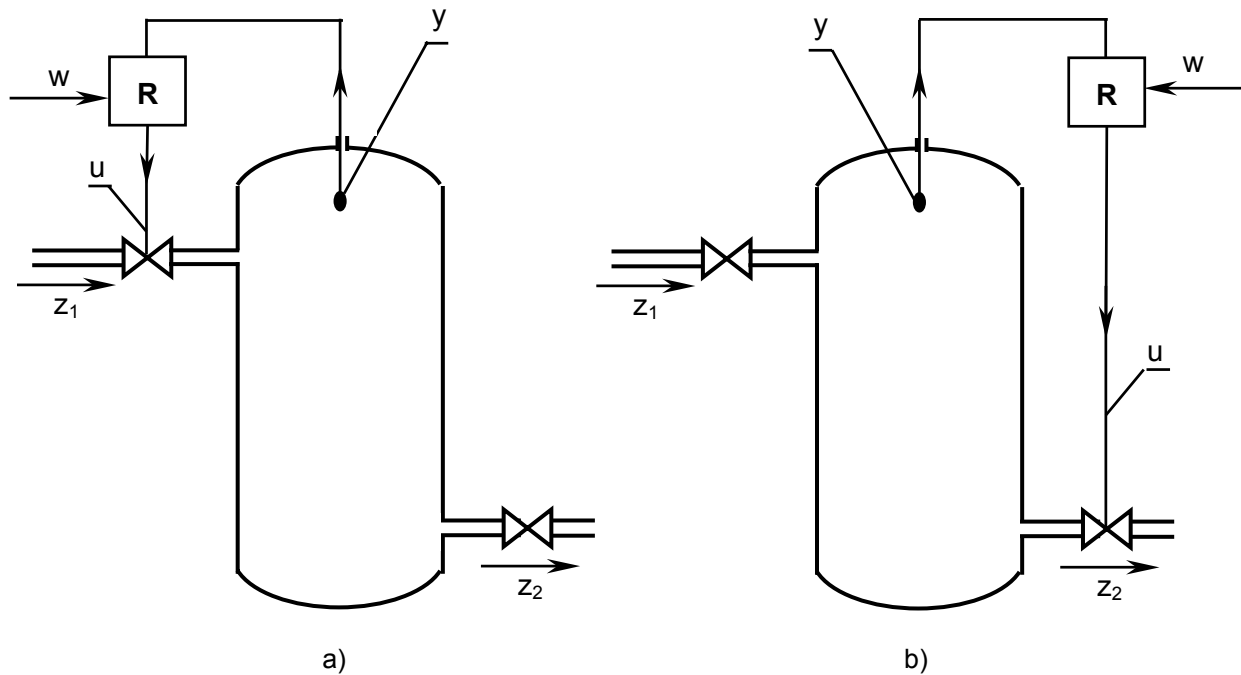
Pri regulácii je možné robiť zásah akčnej veličiny buď do prívodu energie, ako to bolo urobené aj v predošlom prípade (Obr. 23, Obr. 24 a), alebo do spotreby energie (Obr. 24 b).



Obr. 24 : Regulácia teploty vody v prietokových ohrievačoch

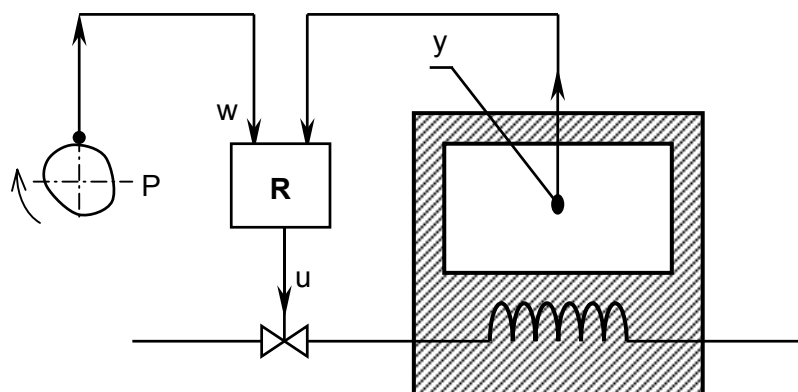
Na Obr. 24 a) je prietokový ohrievač vody vykurovaný napríklad parou, pričom regulátor mení množstvo privádzanej energie podľa toho, aké veľké poruchy  $z$ , predstavované zmenou odberu ohriatej vody, sú v danom čase. Akčný zásah je teda urobený do prívodu energie. Na Obr. 24 b) sa množstvo privádzanej energie nemení a regulátor zmenou prierezu ventilu mení množstvo odoberanej kvapaliny z ohrievača. Akčný zásah je teda urobený do spotreby energie.

Podobné príklady sú uvedené na Obr. 25 pri regulácii tlaku v zásobníkoch s akčným zásahom do prívodu (Obr. 25 a) a do odberu (Obr. 25 b).



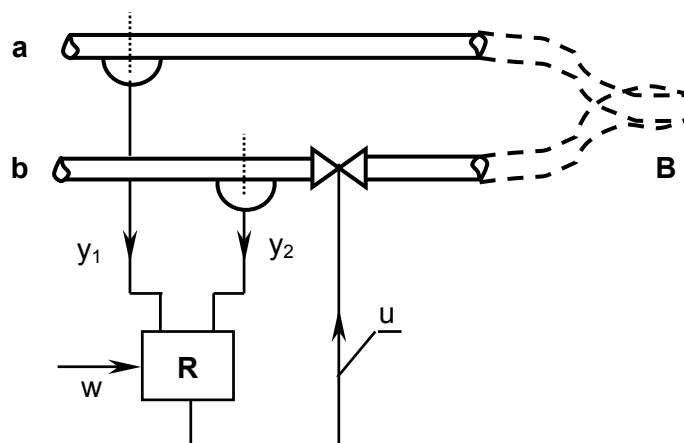
Obr. 25 : Regulácia tlaku v zásobníkoch

Príklad programovej regulácie je uvedený na Obr. 26. Žiadaná hodnota sa v tomto prípade stále mení v určitej dopredu definovanej závislosti podľa zmeny riadiacej veličiny  $w$  napr. pomocou otáčajúcej sa vačky. Výmenou vačky, t.j. zmenou jej tvaru je možné nastaviť iný program regulačného obvodu. Dnes samozrejme je možná jednoduchšia a efektívnejšia realizácia programu ako sú vačky.



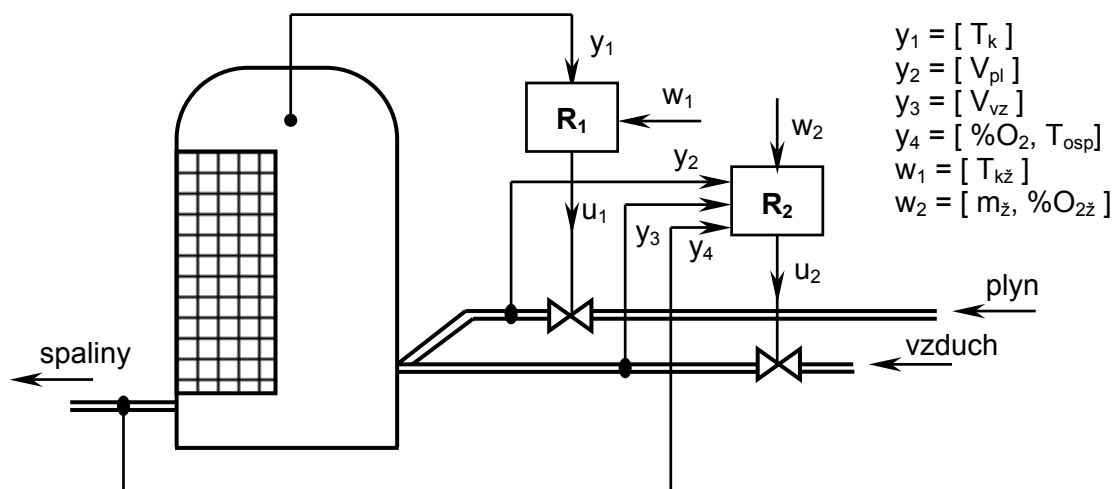
Obr. 26 : Programová regulácia teploty

V hutníckych prevádzkach sa často vyskytuje pomerová regulácia (Obr. 27). Prietochné množstvá plynu a vzduch v prívodných potrubíach do horáku sú merané napr. clonkami  $y_1, y_2$ . Regulátor mení len prietochné množstvo v potrubí  $b$ , teda regulovanú veličinu  $y_2$ . Pre správnu činnosť horáka je dôležité dodržať správny pomer  $w$  medzi prietochným množstvom plynu a vzduchu  $y_1, y_2$ . Ak sa zmení prietochné množstvo v jednom z potrubí, regulátor upraví množstvo  $y_2$  tak, aby pomer bol dodržaný.



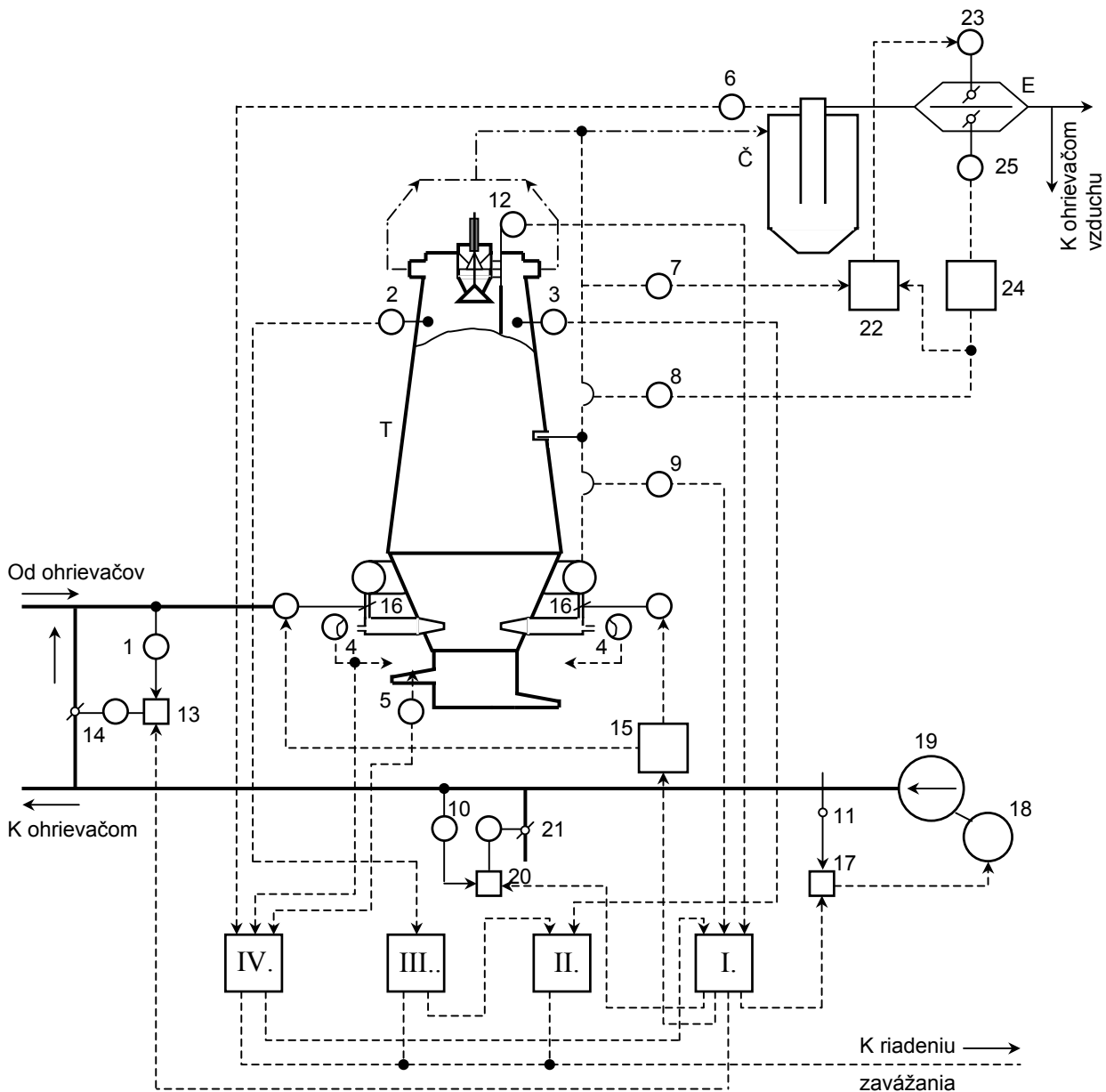
Obr. 27 : Pomerová regulácia

V predošlom prípade sme sa sústredili len na dodržanie pomeru dvoch prietochných množstiev. To však napr. pri vykurovaní nejakého zariadenia, ako bola ohrievacia pec (Obr. 23 a), alebo ako sú aj ohrievače vysokopecného vetra (Obr. 28), nepostačuje, pretože musí existovať aj ďalší regulátor ( $R_1$ ), ktorý zabezpečí vyhriatie na požadovanú teplotu riadením príkonu paliva, regulátor  $R_2$  zabezpečí pomer.



Obr. 28 : Regulácia vykurovania ohrievača vysokopecného vetra

Pri vykurovaní ohrievačov vetra sa často používa extrémna regulácia, lebo je potrebné chrániť klenbu ohrievača pred prehriatím. Akonáhle teplota klenby  $y_1$  dosiahne maximálnu prípustnú teplotu, regulátor upravuje pomer vzduch plyn tak, že je privádzané vyššie množstvo vzduchu voči plynu ako predtým, čím klesne teoretická teplota horenia a klenba sa ďalej neprehrieva. Množstvo dodávanej energie však neklesá, teda vykurovanie pokračuje ďalej až po dosiahnutie maximálnej požadovanej alebo dovolenej teploty odchádzajúcich spalín z ohrievača ( $y_4$ ).



T-šachta pece, Č-čistič vysokopecného plynu, E- expandér, I, II, III, IV – radiacie počítače, 1-snímač teploty horúceho vetra, 2-snímače teploty na výfučni, 3-snímače teploty po obvode pece, 4-snímače teploty v ústí výfučni, 5-snímače teploty trosky, analyzátor vysokopecného plynu na obsah CO<sub>2</sub>, CO, H<sub>2</sub>, 7-snímač tlaku na sadzobni, 8-snímač diferenčného tlaku na hornom úseku pece, 9- snímač diferenčného tlaku na dolnom úseku šachty pece, 10-snímač vlhkosti vetra, 11-snímač množstva studeného vetra, 12-snímač úrovne zavážky, 13-PID regulátor teploty vetra, 14-regulačná klapka pre riadenie teploty vetra zmiešavaním, 15-regulátor rozdelenia vetra na výfučne, 16-rozdeľovacie klapky, 17-regulátor množstva vetra, 18-pohon dúchadla vetra (parná alebo spaľovacia turbína s reguláciou otáčok), 19-dúchadlo, 20- regulátor vlhkosti, 21-regulačný ventil prívodu pary, 22-regulátor tlaku na sadzobni s korekčným signálom od diferenčného tlaku na hornom úseku šachty, 23,25-škrtiace klapky expandéra, 24-regulátor diferenčného tlaku v hornej polovici šachty pece.

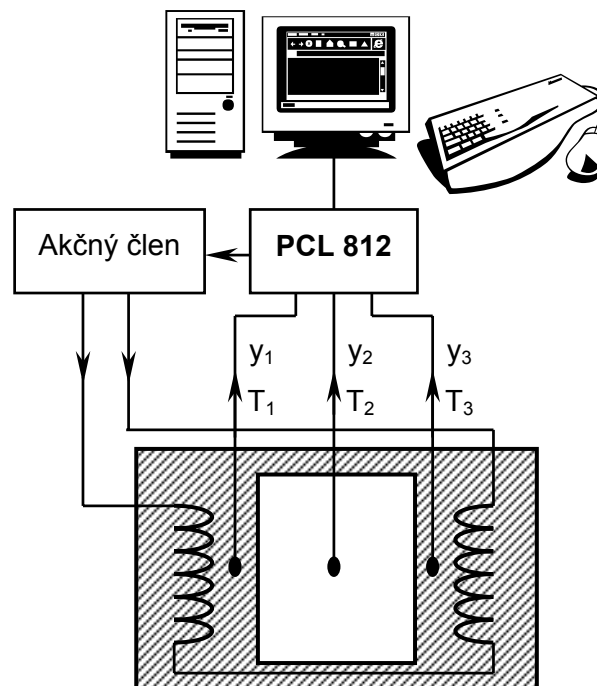
Obr. 29 : Automatizácia vysokopecného pochodu



V hutníckych prevádzkach sa nachádza veľké množstvo veľmi zložitých, energeticky a surovinovo veľmi náročných zariadení. Preto je tu automatizácia veľmi dôležitá, lebo efektívne riadenie takýchto zariadení prakticky nie je možné a každé ušetrené percento energie alebo materiálu tu predstavuje veľké ekonomické hodnoty.

K najzložitejším hutníckym zariadeniam určite patrí aj vysoká pec (Obr. 29), ktorá slúži na výrobu surového železa zo železnej rudy (alebo z jej polotovarov - aglomerátu a peliet), koksu a prísad (vápenec apod.). Budovanie komplexnej automatizácie je tu sťažené najmä tým, že tento zložitý výrobný pochod nie je možné kontrolovať priamym meraním v celom rozsahu agregátu (vysoké teploty, tlaky apod.). Je to protiprúdny agregát, materiál prejde pecou asi za osem hodín, kým plyny asi za štyri sekundy. Pec má veľkú akumuláciu schopnosť a reaguje na zmeny vstupných veličín s veľkým časovým oneskorením. Riadenie celej pece je rozdelené na viacero okruhov. Ide najmä o riadenie zloženia, množstva a rozmiestnenia vsádzkových surovín v hornej časti pece (riadenie zhora), riadenie tepelného stavu hornej časti pece (oblasť nízkych teplôt), riadenie tepelného stavu dolnej časti pece (oblasť vysokých teplôt), riadenie zostupu vsádzky, riadenie tlakových pomerov v peci apod.

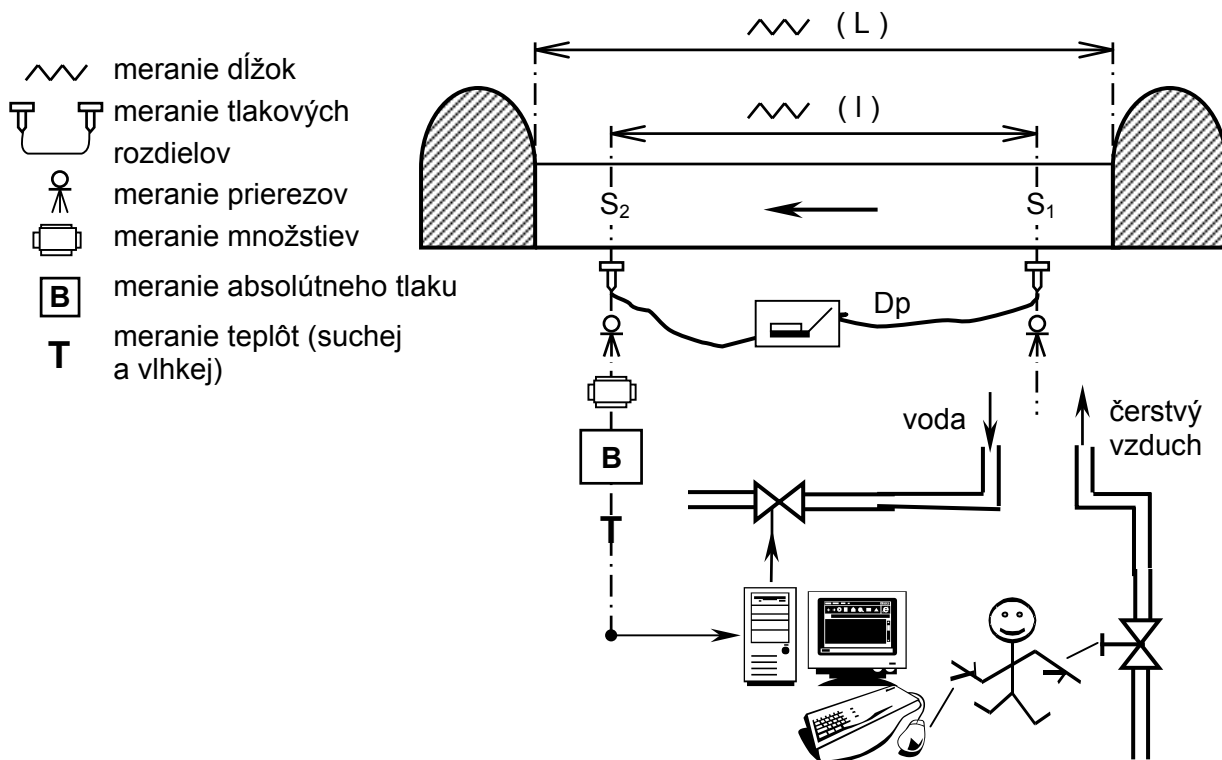
Riadenie rôznych, najmä laboratórnych, technologických objektov je možné aj pomocou klasických osobných počítačov, ako je to uvedené aj na príklade laboratórnej elektrickej ohrievacej pece na Obr. 30. Nutným doplnkom sú však vstupno/výstupné karty (napr. PCL 812), meracie snímače, ovládacie členy a spojovacie vedenia.



Obr. 30 : Riadenie laboratórnej ohrievacej pece počítačom

V priemyselnej praxi to môže byť realizované rovnako, len okrem klasických PC sú používané často aj priemyselné PC, ktoré sú odolnejšie voči nepriaznivým vplyvom prostredia daných prevádzok, alebo sa používajú priamo len riadiace automaty, napr. PLC – tzv. programovateľné logické regulátory známe aj ako sekvenčné regulátory.

K veľmi zložitým prírodno-technickým systémom patria napríklad aj banské diela. Sú vytvorené v prírodnom prostredí, pre ich činnosť je potrebné veľké množstvo výkonných strojov a iných zariadení a pracujú v nich aj ľudia. Ich prevádzka je náročná po ekonomickej stránke a na druhej strane výrazne ovplyvňujú aj životné prostredie. Pre prácu človeka v baniach je potrebné vytvoriť jeho zdraviu prijateľné podmienky. K základným funkciám už od začiatku baníctva patrila napr. aj problematika odvodňovania a ovetrávania banských diel. Aj tu v súčasnosti veľmi pomáha a je nutná meracia a regulačná technika. Úroveň monitorovacích, výstražných a riadiacich systémov môžeme zvýšiť využívaním modernej výpočtovej techniky a informačných systémov (Obr. 31). Rýchle a komplexné sledovanie a tiež vyhodnocovanie veľkého množstva meraných údajov môže prispieť okrem už uvedeného aj k zvýšeniu bezpečnosti prevádzky banských diel.



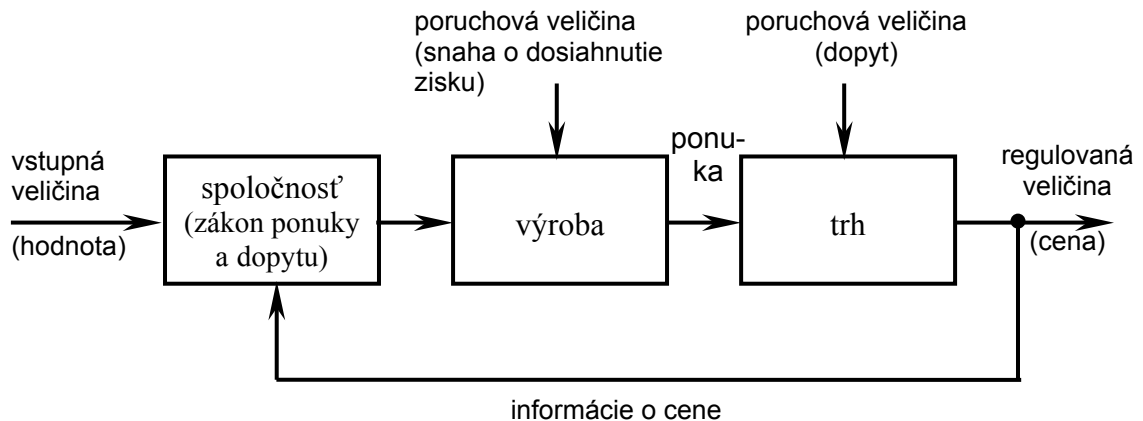
Obr. 31 : Schéma merania a regulácie jednotlivého horizontálneho banského diela

Okrem toho sa v súčasnosti využíva výpočtová technika, informačné systémy a ďalšie podporné programové vybavenie s naprogramovanými optimalizačnými a plánovacími metódami aj na vyšších úrovniach riadenia banských závodov, kde sú v popredí úlohy spojené s plánovaním a s realizáciou plánov, teda s riadením. K tomu je potrebné veľké množstvo údajov ako o vlastnom závode, tak aj o trhu apod. Rôzne matematické metódy a modely sa využívajú aj pri optimalizácii dobývania ložísk, čím je možné znižovať náklady a zvyšovať konkurencieschopnosť a aj zisky.

S reguláciou a riadením sa nestretávame iba u technických systémov ale tiež aj u živých organizmov, ako to vo svojej knihe zdôraznil už Norbert Wiener. Vznik a existencia živých organizmov je podmienená existenciou celého radu regulačných mechanizmov od molekulárnej úrovne až po úroveň ekologickú alebo ekonomickú.

V modernej ekonomike je možné nájsť množstvo príkladov [73] aplikácie kybernetických metód a riadenia na rôznych úrovniach, od riadenia výroby cez operatívny a taktický management až po strategický management, a tiež pri plnení rôznych funkcií, počnúc výrobnou funkciou, cez obchodnú, finančnickú a účtovnícku až po ochrannú funkciu. Meranie alebo pozorovanie, porovnávanie a vytváranie akčných zásahov má aj tu svoje nezastupiteľné miesto a nachádzame tu regulačné obvody. Platí to pre každú úroveň organizácie hospodárstva.

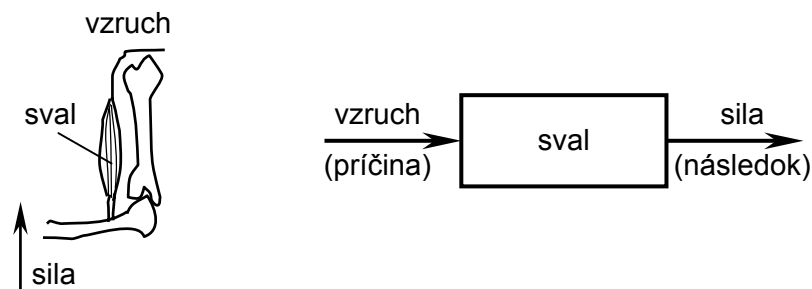
Ako príklad si uvedieme len jednoduchý regulačný pochod trhovej regulácie ceny tovaru. Schéma je znázornená na obrázku (Obr. 32). Ak sa napríklad tovar predáva príliš lacno, lebo o neho už nebol dostatočný záujem, príjmy výrobcu nezodpovedajú jeho očakávaniu. Preto klesá aj záujem výrobcov o výrobu takého tovaru, takže ho na trhu ubúda, klesá ponuka. Následkom zmenšenia ponuky však vzrastá cena, až dosiahne svoju normálnu hodnotu. Ak cena aj ďalej vzrastá, lebo ponuka nekryje potrebu, má to za následok vzrast výroby tohto výrobku. Následkom toho klesá zasa cena a blíži sa znova k svojej normálnej hodnote.



Obr. 32 : Trhová regulácia ceny produktov

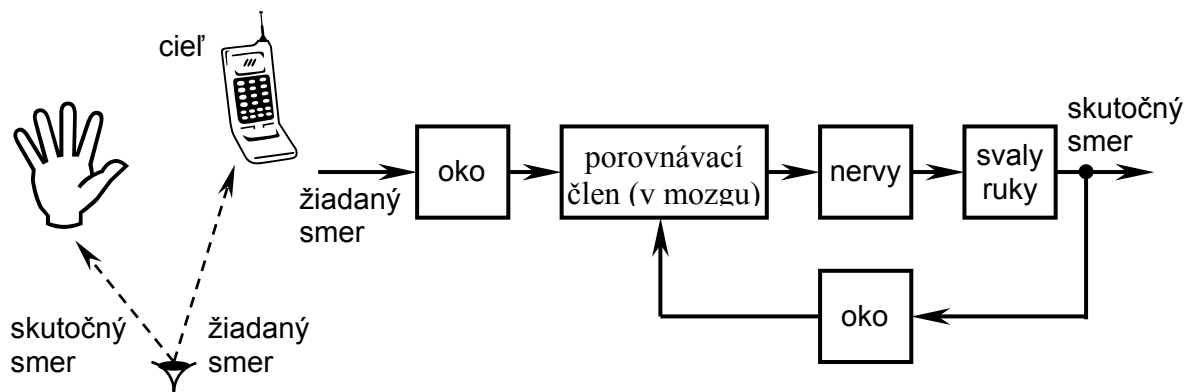
Všeobecným charakteristickým rysom týchto systémov je, že sú podstatne zložitejšie ako technické systémy, patria väčšinou do skupiny stochastických systémov a metódy riadenia sú oveľa zložitejšie a menej prepracované ako pre technické systémy.

Príkladom kauzálneho systému môže byť aj ľudský sval (Obr. 33), ktorý na základe vstupných signálov vykonáva zodpovedajúcu činnosť. Príčinou činnosti svalu, teda vzniku ťažnej sily, je nervový vzruch. Akým spôsobom však sval mení nervový vzruch na ťažnú silu, to v obrázku nie je znázornené, teda na sval sa pozeráme v tomto prípade ako na čiernu skrinku. Rozdiel oproti technickým systémom je tu aj v tom, že biologické systémy sa môžu časom meniť a prispôbovať svoje správanie.



Obr. 33 : Sval ako systém

Podstatne zložitejším systémom, riadiacim systémom, je riadenie svalov ľudskej ruky tak, aby sme ňou mohli napríklad vziať do ruky mobil (Obr. 34) a používať ho. V tomto prípade už vidíme, že sa uplatňujú všetky činnosti automatického riadenia počnúc zberom informácie, potom jej prenosom, vyhodnotením v mozgu a vyslaním riadiacich povelov do svalov, hoci takéto činnosti vykonávame často podvedome.



Obr. 34 : Princíp riadenia ruky

Ešte zložitejšie činnosti súvisia napríklad s reguláciou ľudskej teploty, regulácia dýchania, ktorá patrí k viacparametrovej regulácii apod. Do takýchto zložitých činností je ako riadiaci systém zapojený ľudský mozog, ktorý je najzložitejšou známou vecou pracujúcou na kybernetických princípoch ako vo svojej vnútornej činnosti, tak aj vo vzťahu k celému telu ale aj k okoliu človeka. Oproti najdokonalejším doteraz známym technickým systémom je neprekonateľný hlavne vo svojich tvorivých schopnostiach, ktoré sa v danej miere asi technicky nikdy nepodarí dosiahnuť.

## 2 Lineárne spojité systémy

Lineárne systémy sú také systémy, pre ktoré platí zákon superpozície, alebo ktoré majú lineárnu statickú charakteristiku.

Matematický popis jednoparametrových lineárnych sústav je možné vo všeobecnosti rozdeliť na dva základné a vzájomne ekvivalentné typy popisov :

- vonkajší popis – popis pomocou vstupno výstupných premenných - diferenciálnych rovníc, obrazových prenosov apod.,
- vnútorný popis – popis pomocou stavových premenných.

Ak poznáme vnútorný popis (model) procesu, jednoznačne z neho vyplýva aj vonkajší (vstupno výstupný) popis procesu. Opačne to ale neplatí. Našou hlavnou oblasťou záujmu budú v ďalšej časti spojité jednoparametrové systavy, ich popis a analýza ich vlastností.

### 2.1 Vonkajší matematický popis spojité lineárnych sústav

Pri vonkajšom popise je možné spojité jednoparametrové lineárne systavy popísať lineárnou diferenciálnou rovnicou :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (14)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  sú konštantné koeficienty,  
 $y(t)$  je výstupnou a  $u(t)$  vstupnou veličinou.

Pri odvodzovaní diferenciálnej rovnice väčšinou vychádzame z fyzikálnej podstaty dejov v popisovanom bloku, alebo ju získavame aj experimentálnymi metódami.

K ďalšiemu typu vonkajšieho popisu patrí popis pomocou Laplaceovho obrazového prenosu alebo pomocou frekvenčného prenosu, pomocou prechodovej, impulznej alebo tiež aj pomocou frekvenčnej charakteristiky.

Vnútorný popis - metóda stavového priestoru - dáva úplný obraz o všetkých dynamických vlastnostiach, to znamená i tých, ktoré z hľadiska vzťahu vstup - výstup nie sú pozorovateľné. Metódy založené na stavovom priestore pracujú v časovej oblasti a bude o nich pojednané neskôr.

#### 2.1.1 Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia poskytuje veľmi jednoduchú metódu riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Umožňuje veľmi jednoduché odvodenie vstupno výstupných modelov, ktorých použitie je výhodné pri identifikácii a návrhu algoritmov riadenia. Pri takomto prístupe sa diferenciálne rovnice v časovej oblasti transformujú do oblasti komplexnej premennej, kde sa dajú riešiť ako algebrické rovnice a potom riešenia sa opäť transformujú do časovej oblasti.

Majme funkciu  $f(t)$ , ktorá nech spĺňa podmienky :

- a)  $f(t) = 0$ , pre  $t < 0$ ,
- b)  $f(t)$  je v každom intervale premennej  $t$  jednoznačná a po úsekoch spojitá a existuje integrál

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty, \text{ pre } 0 < a < b < +\infty, \quad (15)$$

- c)  $f(t)$  je exponenciálneho rádu, t.j., že platí  $|f(t)| < e^{kt}$  pre akékoľvek konečné  $k$  a pre dostatočne veľké  $t$ . Túto požiadavku nespĺňa napr. funkcia  $f(t) = e^{t^2}$ .

Ak funkcia  $f(t)$  spĺňa požiadavky a), b), c), potom existuje Laplaceov integrál :

$$F(s) \equiv L[f(t), s] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (16)$$

ktorý transformuje funkciu  $f(t)$  argumentu  $t$  na funkciu  $F(s)$  argumentu  $s$  (Laplaceov operátor  $s$  je komplexné číslo  $s = r + i\omega$ ). Funkciu  $f(t)$  nazývame originálom a funkciu  $F(s)$  voláme jej obrazom.

Pre praktické výpočty podľa rovnice (16) sú veľmi užitočné pomocné vzťahy (Eulerove vzorce) :

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, & \sin(\omega t) &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \\ e^{i\omega t} &= \cos(\omega t) + i * \sin(\omega t), & e^{-i\omega t} &= \cos(\omega t) - i * \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (17)$$

Základné vlastnosti :

	originál	obraz
1. Linearita	$k_1 f_1 \pm k_2 f_2$	$k_1 F_1 \pm k_2 F_2$
2. Substitúcia	$f(at)$	$1/a F(s/a)$
3. Posun v origináli	$f(t-a)$	$e^{-at} F(s)$
4. Posun v obraze	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$

...

11. Veta o počiatkovej hodnote  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$  .

12. Veta o konečnej hodnote  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$  .

Pre transformáciu derivácií funkcií pri nulových počiatkových podmienkach platí vzťah :

$$L[f^{(n)}(t), s] = s^n F(s) \quad (18)$$

a pri nenulových počiatkových podmienkach platí vzťah :

$$L[f^{(n)}(t), s] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) . \quad (19)$$

Pre veľa praktických výpočtov postačuje mať k dispozícii Laplaceove obrazy základných typov funkcií, ktoré sú uvedené v nasledujúcom skrátenom slovníku. Podrobnejšie slovníky je možné nájsť v literatúre a aj v prílohe v Tab. 4.

#### LAPLACEOV SLOVNÍK

originál	obraz	originál	obraz
1. K	$K / s$	7. $\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
2. t	$1 / s^2$	8. $\cos \omega t$	$s / (s^2 + \omega^2)$
3. $t^n$	$n! / s^{n+1}$	9. $e^{-at} \sin \omega t$	$\omega / ((s+a)^2 + \omega^2)$
4. $K \exp(-at)$	$K / (s + a)$	10. $e^{-at} \cos \omega t$	$(s+a) / ((s+a)^2 + \omega^2)$
5. $t \exp(-at)$	$1 / (s + a)^2$	11. $\delta(t)$	1
6. $t^n \exp(-at)$	$n! / (s + a)^{n+1}$		

**Príklad 1 :** Predpokladajme, že funkcia  $f(t)$  je konštanta  $f(t)=1$ , potom jej Laplaceov obraz môžeme určiť buď priamo podľa predošlého slovníka, keď za  $f(t)$  dáme  $K=1$ . Potom  $F(s)=1/s$ . Rovnaký výsledok získame, ak budeme počítať hodnotu integrálu (16) pre  $f(t)=1$  :

$$F(s) \equiv L[f(t), s] = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (20)$$

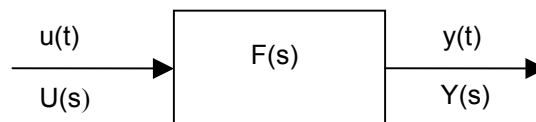
*Inverzná Laplaceova transformácia funkcie*, t.j. prechod z obrazu  $F(s)$  k originálu  $f(t)$ , je daná nasledujúcim vzťahom :

$$f(t) \equiv L^{-1}[F(s), t] = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\omega}^{r+i\omega} e^{st} F(s) ds . \quad (21)$$

Vo väčšine praktických výpočtov sa však inverzná Laplaceova transformácia sa robí pomocou podobných slovníkov alebo tabuliek, ako bola uvedená v predošlej časti.

*Obrazový prenos* sústavy  $F(s)$  definujeme ako pomer obrazu  $Y(s)$  výstupnej veličiny  $y(t)$  ku obrazu  $U(s)$  vstupnej veličiny  $u(t)$ , teda :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} . \quad (22)$$



Obr. 35 : Popis systému pomocou obrazového prenosu

Ako už bolo vysvetlené na Obr. 8, grafické zobrazenie systému tvorí teda *blok*, ktorý má jeden alebo aj viac vstupov a jeden alebo viac výstupov, a je v ňom uvedený vzťah medzi vstupom a výstupom, v tomto prípade pomocou obrazového prenosu. Signály sú znázornené orientovanými úsečkami. Signály v časovej oblasti popisujeme malými písmenami a ich Laplaceove obrazy popisujeme veľkými písmenami abecedy.

**Príklad 2 :** Funkčný vzťah medzi vstupnou a výstupnou veličinou uvažovanej sústavy je daný nasledujúcou diferenciálnou rovnicou :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = k u(t) . \quad (23)$$

Za predpokladu, že sústava je v rovnovážnom stave, teda počiatkové podmienky sú nulové ( $y(0)=y'(0)=0$ ), použitím Laplaceovej transformácie môžeme písať :

$$a s^2 Y(s) + b s Y(s) + c Y(s) = k U(s) , \quad (24)$$

odkiaľ obrazový prenos je :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{a s^2 + b s + c} . \quad (25)$$

Všeobecne platí :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} , \quad (26)$$

príčom pre reálne fyzikálne systavy platí podmienka fyzikálnej realizovateľnosti  $n \geq m$ , teda následok nemôže predbiehať príčinu. Korene polynómu čitateľa označujeme ako *nuly* a korene polynómu menovateľa označujeme zase ako *póly*. Polynóm menovateľa rovný nule sa volá *charakteristická rovnica*.

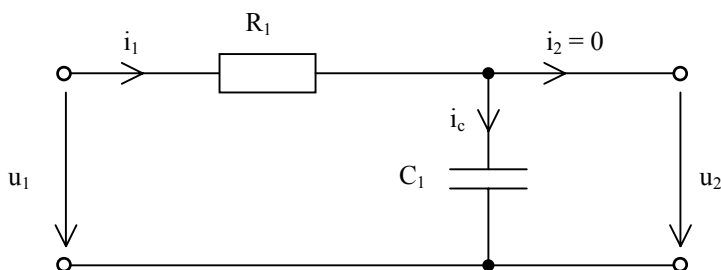
Ak je sústava popísaná diferenciálnou rovnicou (DR) 1-ho rádu, hovoríme, že aj sústava je 1-ho rádu alebo jednodokapacitná sústava alebo sústava s oneskorením prvého rádu. Ak je sústava popísaná DR 2-ho rádu, hovoríme, že aj sústava je 2-ho rádu (dvojkapacitná sústava). Ak je sústava popísaná DR n-tého rádu, hovoríme, že aj sústava je n-tého rádu. Takéto systavy voláme aj zotrvačné systavy príslušného rádu.

### 2.1.2 Príklady sústav prvého rádu

V tejto časti uvedieme príklady troch sústav prvého rádu. Prvá sústava bude elektronická, druhá hydraulická a tretia tepelná, pričom ich matematické modely a obrazové prenosy budú rovnaké.

#### PRÍKLAD I.

Majme sústavu zloženú z jedného odporu  $R_1$  a z jedného kondenzátora  $C_1$  v zapojení podľa nasledujúceho obrázku (Obr. 36).



Obr. 36 : Jednodokapacitná sústava z odporu a kondenzátora

Vstupnou veličinou do sústavy je napätie  $u_1$  a výstupnou veličinou je napätie  $u_2$ . Zaujímá nás vzťah medzi vstupnou a výstupnou veličinou  $u_2(t) = f(u_1(t))$ . Ak  $R_1$  a  $C_1$  sú ideálne, teda nemenia svoje hodnoty v závislosti od teploty, prúdu, ... (alebo ich menia málo), považujeme túto sústavu za lineárnu (alebo približne lineárnu). Za uvedených predpokladov podľa 2. a 1. Kirchhoffovho zákona platí :

$$u_1 = R_1 i_1 + u_2, \quad i_1 = i_2 + i_c, \quad \text{pre } i_2 = 0 \text{ je } i_1 = i_c.$$

a pre prúd tečúci kondenzátorom platí

$$i_c = i_1 = C_1 \frac{du_2}{dt}, \quad \text{teda} \quad u_1 = R_1 C_1 \frac{du_2}{dt} + u_2.$$

Označme  $R_1 C_1 = T_1$  [s] (časová konštanta), potom :

$$T_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 \tag{27}$$

alebo :

$$T_1 u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t) \tag{28}$$

Dostali sme nehomogénnu diferenciálnu rovnicu 1-ho rádu, ktorá je matematickým modelom v implicitnom tvare pre uvedenú jednodokapacitnú sústavu a  $u_1$  a  $u_2$  sú funkcie času, teda  $u_1(t)$  a  $u_2(t)$ .

Z daného matematického modelu v implicitnom tvare nie je možné vyjadriť hľadanú závislosť výstupnej veličiny  $u_2(t)$  na veličine  $u_1(t)$  priamo, ale len riešením uvedenej nehomogénnej diferenciálnej rovnice buď klasickým postupom alebo s využitím Laplaceovej transformácie.



## Riešenie I.

Riešenie diferenciálnej rovnice (28) musí vyhovovať ako samotnej diferenciálnej rovnici, tak aj počiatkovej podmienke.

- a) riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice :

K homogénnej DR  $T_1 u_2' + u_2 = 0$  prislúcha charakteristická rovnica  $T_1 s + 1 = 0$  a jej koreň sa rovná  $s = -1/T_1$ . Potom riešenie homogénnej rovnice je

$$u_{2h}(t) = K_1 e^{st}, \quad u_{2h}(t) = K_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \quad (29)$$

Dosadením môžeme urobiť kontrolu, že danej DR naozaj vyhovuje.

- b) partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice :

nech  $u_1(t) = \text{konštanta} = u_{1K}$ , potom riešenie má tvar  $u_{2n}(t) = K_2$  a po dosadení do DR :

$$T_1 \cdot 0 + K_2 = u_{1K} \quad \text{určíme konštantu} \quad K_2 = u_{1K}, \quad u_{2n}(t) = u_{1K}$$

- c) výsledné riešenie diferenciálnej rovnice :

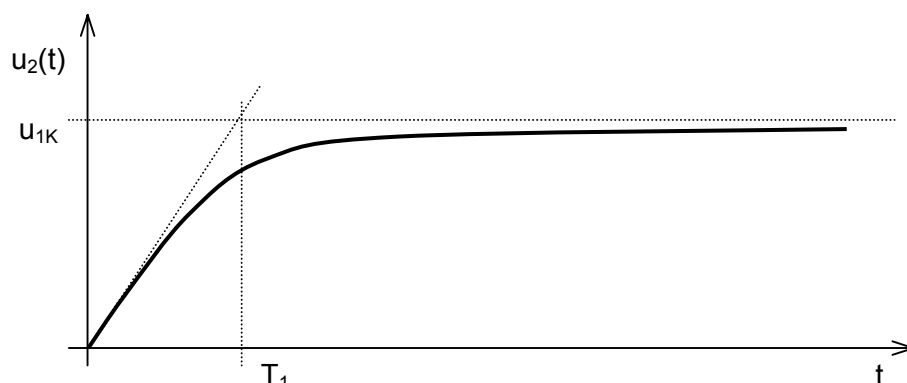
Výsledné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice sa rovná súčtu riešenia homogénnej DR a partikulárneho riešenia :

$$u_2(t) = u_{2h}(t) + u_{2n}(t), \quad u_2(t) = K_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + u_{1K} \quad (30)$$

Konštantu  $K_1$  určíme z počiatkových podmienok  $u_2(0)=0$ , teda  $0 = K_1 e^{-\frac{0}{T_1}} + u_{1K}$ , odkiaľ  $K_1 = -u_{1K}$  a výsledné riešenie má tvar

$$u_2(t) = u_{1K} (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (31)$$

Získané riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice (28) je matematickým modelom danej jednodukapitnej sústavy v explicitnom tvare. Jeho grafický priebeh je znázornený na Obr. 37, kde je vyznačený aj vzťah časovej konštanty k hodnote riešenia v danom čase. Časová konštanta  $T_1$  je doba, za ktorú by výstupná veličina dosiahla ustálenú hodnotu, keby narastala počiatkovou (konštantnou) rýchlosťou. Ak hodnotu  $T_1$  dosadíme do riešenia, je možné určiť, že hodnota výstupnej veličiny v danom čase je v skutočnosti rovná približne 63% z hodnoty v ustálenom stave. Verifikáciou na experimentálnom zariadení by sme napríklad s pomocou osciloskopu dospeli k rovnakému priebehu a aj veľmi blízkym výsledkom.



Obr. 37 : Grafické znázornenie výstupu jednodukapitnej sústavy

Uvedený priebeh budeme neskôr označovať ako prechodovú charakteristiku jednodukapitnej sústavy, čo je jednou z jej typických dynamických charakteristík.

## Riešenie II.

Riešenie diferenciálnej rovnice (28) pomocou Laplaceovej transformácie :

Nech  $u_1(t) = \text{konštanta} = u_{1K}$  a  $u_1(0) = 0$ , po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice

$$T_1 u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t) \quad (32)$$

dostaneme rovnicu  $T_1 U_2 s + U_2 = u_{1K} / s$ , z ktorej môžeme vyjadriť Laplaceov obraz výstupnej veličiny priamo v explicitnom tvare :

$$U_2 s (T_1 s + 1) = u_{1K} \Rightarrow U_2 = \frac{u_{1K}}{s (T_1 s + 1)}, \quad (33)$$

Urobíme rozklad menovateľa získanej rovnice na parciálne zlomky a upravíme ich na taký tvar, ktorý sa nachádza v slovníku obrazov, aby sme mohli potom po stanovení konštánt určiť aj originály v časovej oblasti.

$$U_2 = \frac{u_{1K}}{s (T_1 s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{T_1 s + 1}, \quad A = u_{1K}, \quad B = -u_{1K} T_1 \quad (34)$$

$$U_2 = \frac{u_{1K}}{s} - \frac{u_{1K} T_1}{T_1 s + 1} = u_{1K} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{T_1 s + 1} \right).$$

Z uvedeného rozkladu je jasné, že prvý obraz odpovedá konštante a druhý zase exponenciálnej funkcii. Teda výsledné riešenie má tvar :

$$u_2(t) = u_{1K} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (35)$$

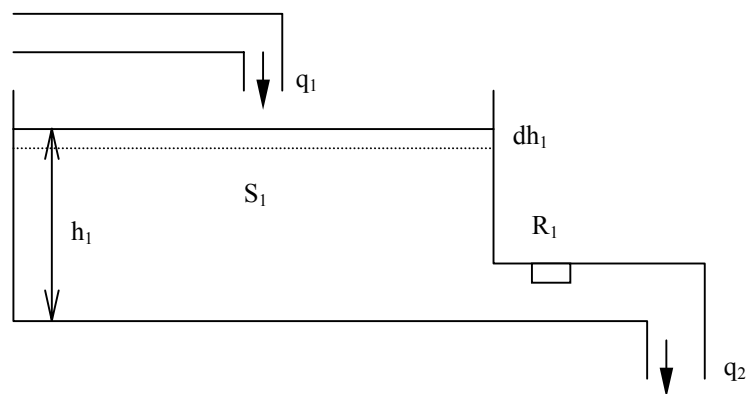
Získané riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice (28) je matematickým modelom danej jednodukapacitnej sústavy v explicitnom tvare. Jeho grafický priebeh je znázornený na Obr. 37. Ako rovnica, tak aj priebeh sú totožné s riešením získaným klasickým postupom. Pri riešení pomocou Laplaceovej transformácie je riešenie prehľadnejšie a kratšie. Podobne by sme mohli hľadať riešenia aj pre nenulové počiatočné podmienky alebo pre iné typy vstupných signálov a podobne by sme odvodili a riešili aj diferenciálne rovnice pre prúdy v obvode.

S využitím Laplaceovej transformácie môžeme odvodiť aj ďalšiu dôležitú charakteristiku alebo popis jednodukapacitnej sústavy, ktorou je Laplaceov obrazový prenos. Ten určujeme z diferenciálnej rovnice  $T_1 u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t)$  po jej Laplaceovej transformácii pri nulových počiatočných podmienkach a pri všeobecnej vstupnej funkcii  $T_1 U_2(s) s + U_2(s) = U_1(s)$ , odkiaľ po úprave na tvar  $U_2 (T_1 s + 1) = U_1$  s využitím definičného vzťahu (22) získame Laplaceov obrazový prenos jednodukapacitnej sústavy :

$$F(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \quad (36)$$

## PRÍKLAD II.

Majme teraz hydraulickú sústavu podľa Obr. 38, kde  $q_1(t)$  je prítok média do nádoby a  $q_2(t)$  je množstvo vytekajúceho média z nádoby. Priezor nádoby nech je  $S_1$  a výška hladiny v nádobe je  $h_1$ . Zaujímá nás závislosť  $q_2(t) = f(q_1(t))$ , resp.  $h_1(t) = f(q_1(t))$ . Riešiť to budeme dvoma spôsobmi podľa spôsobu definície  $q_2(t)$ .



Obr. 38 : Hydraulická sústava

- a) Špecifická váha média nech je  $\gamma$  a vyteká cez hydraulický odpor  $R_1$ . Ak bude  $\gamma$ ,  $S_1$ ,  $R_1$  lineárne a  $h_1$  nepresiahne výšku nádoby, sústavu považujeme za lineárnu. Zmena média v nádobe je rovná rozdielu prietokov :

$$\frac{d(\text{média})}{dt} = \text{prítok} - \text{odtok} , \quad (37)$$

príčom

$$d(\text{média}) = S_1 dh_1 , \quad (38)$$

potom

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_1 - q_2 . \quad (39)$$

Priebeh  $q_2$  je priamoúmerný hydraulickému tlaku v mieste odporu  $R_1$  a nepriamoúmerný odporu  $R_1$  :

$$q_2 = \frac{\gamma h_1}{R_1} [\text{kp}] . \quad (40)$$

Pre vyjadrenie v [N] je potrebné vynásobiť predošlú rovnicu gravitačným zrýchlením  $g$ . Jej derivovaním získame vzťah vyjadrujúci zmenu  $q_2$  v čase :

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\gamma}{R_1} \frac{dh_1}{dt} \Rightarrow \frac{dh_1}{dt} = \frac{R_1}{\gamma} \frac{dq_2}{dt} . \quad (41)$$

Dosadením do východzej DR a úpravou dostaneme :

$$\frac{S_1 R_1}{\gamma} \frac{dq_2}{dt} + q_2 = q_1 , \quad (42)$$

a po označení  $T_1 = S_1 R_1 / \gamma$  dostaneme nehomogénnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu v takom tvare, ako to bolo v predošlom príklade :

$$T_1 q_2'(t) + q_2(t) = q_1(t) . \quad (43)$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice podľa metód z predošlého príkladu je možné získať hľadanú závislosť výstupnej veličiny od konštantnej vstupnej veličiny v explicitnom tvare :

$$q_2(t) = q_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (44)$$

Podobne by bolo možné určiť aj prenos tejto sústavy a tiež odvodiť diferenciálnu rovnicu pre prírastkové veličiny  $\Delta h_1(t)$ ,  $\Delta q_1(t)$ ,  $\Delta q_2(t)$ , ... apod. Ak nás zaujíma závislosť  $h_1(t) = f(q_1(t))$ , dosadíme do východzej bilančnej rovnice odvodený vzťah pre  $dq_2/dt$  a dostávame :

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_1 - \frac{\gamma}{R_1} h_1 \quad (45)$$

z čoho získame hľadanú diferenciálnu rovnicu :

$$S_1 h_1'(t) + \frac{\gamma}{R_1} h_1(t) = q_1(t) \quad (46)$$

Riešenie je možné získať už uvedenými metódami v predošlom príklade. Pri tejto diferenciálnej rovnici by bolo možné sledovať matematickú aj fyzikálnu analógiu s diferenciálnou rovnicou pre odpor a kondenzátor, ak by sme ich riešili čisto ako homogénne ( $q_1(t)=0$ ,  $u_1(t)=0$ ). Z fyzikálneho hľadiska by sa jednalo o výtok  $q_2(t)$  zo sústavy s počiatočnou výškou média  $h_1$ , resp. o vybíjanie kondenzátora nabitého počiatočným napätím  $u_1$  prúdom  $i_c(t)$ .

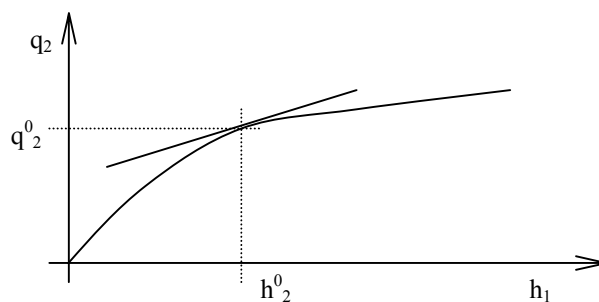
- b) Médium vyteká voľným pádom z nádoby otvorom a jeho množstvo je možné určiť s využitím Torricelliho vzorca, teda výtoková rýchlosť je určená z rovnosti potenciálnej a kinetickej energie média vytekajúceho vplyvom vlastnej tiaže :

$$q_2 = k_1 f \sqrt{2 g h_1} , \quad (47)$$

kde  $k_1$  - je korekčná konštanta vzhľadom k  $f$ ,  $f$  - je prierez výtokového otvoru,  $g$  - je gravitačné zrýchlenie. Ak označíme  $k_2 = k_1 f \sqrt{2 g}$ ,  $[m^2 m^{1/2} s^{-1}]$ , potom  $q_2 = k_2 \sqrt{h_1}$  a po dosadení dostávame nelineárnu diferenciálnu rovnicu :

$$S_1 h_1' + k_2 \sqrt{h_1} = q_1 . \quad (48)$$

Také diferenciálne rovnice nevieme riešiť, je potrebné urobiť linearizáciu nelineárneho člena rovnice v okolí typického pracovného bodu  $[h_1^0, q_2^0]$  (Obr. 39).



Obr. 39 : Linearizácia v okolí typického pracovného bodu

Linearizáciu je možné robiť matematicky napríklad pomocou rozvoja do Taylorovho radu :

$$q_2 \approx q_2(h_1^0) + q_2'(h_1^0) \frac{(h_1 - h_1^0)}{1!} + \dots \quad (49)$$

Z dôvodu linearizácie môžeme uvažovať iba prvé dva členy radu, čím dostaneme rovnicu priamky v smernicovom tvare, pričom platí :

$$q_2(h_1^0) = k_2 \sqrt{h_1^0}, \quad q_2'(h_1^0) = k_2 \frac{1}{2\sqrt{h_1^0}} = k_2 \frac{\sqrt{h_1^0}}{2h_1^0} \Rightarrow \quad (50)$$

$$q_2 \approx k_2 \sqrt{h_1^0} + k_2 \frac{\sqrt{h_1^0}}{2h_1^0} (h_1 - h_1^0) = k_2 \frac{\sqrt{h_1^0}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{h_1^0}}{2h_1^0} (h_1 - h_1^0)$$

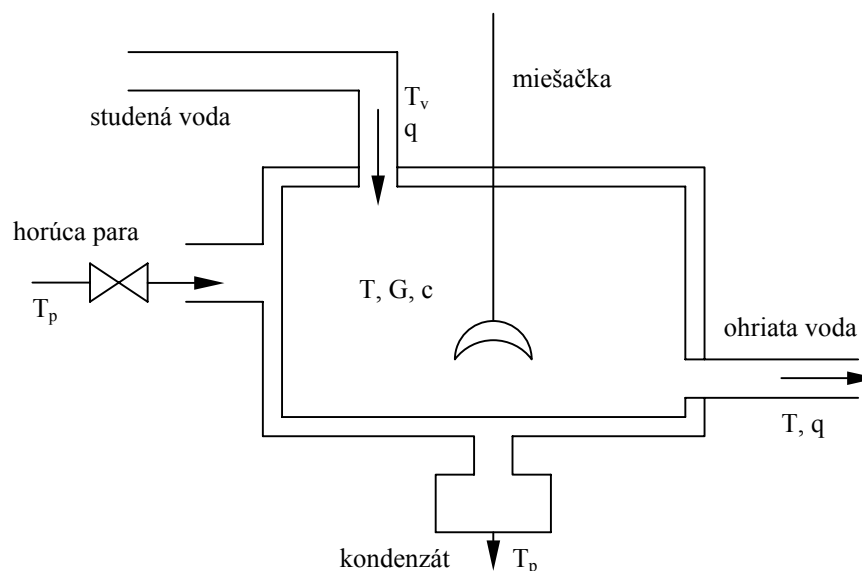
Po označení  $k_3 = k_2 \frac{\sqrt{h_1^0}}{2}$  [ $m^3 \cdot s^{-1}$ ] dostaneme už lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu :

$$S_1 h_1' + k_3 / h_1^0 h_1 = q_1 - k_3, \quad [m^2 m \cdot s^{-1} + m^3 \cdot s^{-1} m^{-1} m = m^3 \cdot s^{-1} - m^3 \cdot s^{-1}], \quad (51)$$

ktorú už vieme riešiť predošlými metódami.

### PRÍKLAD III.

Uvažujme plášťový výmenník tepla, ktorý slúži napríklad na ohrievanie vody alebo určitých iných technologických kvapalín.



Obr. 40 : Plášťový výmenník tepla

Pre ďalší postup zvolíme nasledujúce predpoklady :

- akumulačná schopnosť stien výmenníka oproti akumulačnej schopnosti pracovnej kvapaliny je malá,
- teplota kvapaliny vo výmenníku je konštantná (miešanie),
- prietok, hustota, merná tepelná kapacita kvapaliny a koeficient prestupu tepla sú konštantné.

Bilancia tepla (nestacionárne) za krátky časový úsek  $dt$  je daná rovnicou :

$$\rho q c T_v dt - \rho q c T dt + \alpha S (T_p - T) dt = G c dT, \quad (52)$$

kde  $t$  - je čas,  $T(t)$  - teplota kvapaliny vystupujúcej z výmenníka tepla,  $T_v(t)$  - teplota kvapaliny na vstupe,  $T_p(t)$  - teplota v plášti výmenníka (teplota pary),  $q$  - objemový prietok kvapaliny,  $\rho$  - hustota kvapaliny,  $G=V \cdot \rho$  - je hmotnosť kvapaliny,  $V$  - je objem kvapaliny vo výmenníku,  $c$  - merná tepelná kapacita kvapaliny,  $S$  - prestupová plocha tepla,  $\alpha$  - celkový koeficient prestupu tepla.

Nasledovnými úpravami rovnice

$$\begin{aligned} (\rho q c T_v + \alpha S T_p) dt - (\rho q c + \alpha S) T dt &= G c dT \\ G c dT + (\rho q c + \alpha S) T dt &= (\rho q c T_v + \alpha S T_p) dt \end{aligned} \quad (53)$$

a po delení oboch strán výrazom  $(\rho q c + \alpha S) dt$  dostaneme :

$$\begin{aligned} \frac{G c}{\rho q c + \alpha S} \frac{dT}{dt} + T &= \frac{\rho q c}{\rho q c + \alpha S} T_v + \frac{\alpha S}{\rho q c + \alpha S} T_p \\ K_1 = \frac{G c}{\rho q c + \alpha S}, \quad K_2 &= \frac{\rho q c}{\rho q c + \alpha S}, \quad K_3 = \frac{\alpha S}{\rho q c + \alpha S} \end{aligned} \quad (54)$$

odkiaľ máme hľadanú diferenciálnu rovnicu popisujúcu časovú závislosť teploty ohrievanej vody vo výmenníku tepla od vstupnej teploty studenej vody a od vstupnej teploty ohrievacej pary :

$$K_1 \frac{dT}{dt} + T = K_2 T_v + K_3, \quad (55)$$

s počiatočnou podmienkou  $T(0)=T^s$ . V ustálenom stave platí  $dT/dt = 0$  a tiež  $T_v=T_v^s$ ,  $T=T^s$ ,  $T_p=T_p^s$  a môžeme odvodiť nasledujúcu bilančnú rovnicu :

$$T^s = K_2 T_v^s + K_3 T_p^s \quad (56)$$

Diferenciálnu rovnicu by sme mohli odvodiť aj v odchýlkovom tvare oproti rovnovážnemu stavu pre  $\Delta T(t) = T(t) - T^s$ ,  $\Delta T_v(t) = T_v(t) - T_v^s$ ,  $\Delta T_p(t) = T_p(t) - T_p^s$ , ...

### 2.1.3 Príklad sústavy druhého rádu

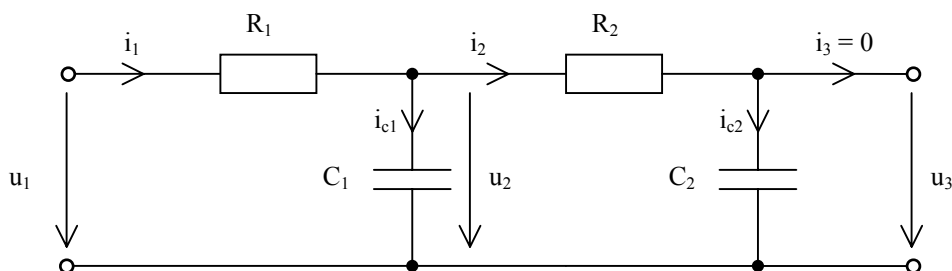
V tejto časti uvedieme príklad len jednej sústavy druhého rádu, a to elektronickej sústavy vytvorenej z dvoch elektronickej sústav prvého rádu. Podobné príklady by sme mohli urobiť aj z dvoch hydraulických sústav vytvorením vzájomných väzieb napríklad tak, že výtok z jednej sústavy je vstupom do druhej sústavy.

#### PRÍKLAD I.

Zaraďme dve jednodukapacitné sústavy s odporom a kondenzátorom za sebou, teda do série, ako je to zobrazené na Obr. 41. Vstupnou veličinou do celej sústavy je napätie  $u_1(t)$  a výstupnou veličinou je napätie  $u_3(t)$ . Zaujímá nás vzťah medzi vstupnou a výstupnou veličinou  $u_3(t) = f(u_1(t))$ . Ak  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$  a  $C_2$  sú lineárne, považujeme túto sústavu za lineárnu, alebo aspoň približne lineárnu. Za uvedených predpokladov podľa 2. a 1. Kirchhoffovho zákona platí :

$$u_2 = R_2 i_2 + u_3, \quad i_2 = i_3 + i_{c2}, \quad \text{pre } i_3 = 0 \text{ je } i_2 = i_{c2}$$

a pre prúd tečúci kondenzátorom platí :  $i_{c2} = i_2 = C_2 \frac{du_3}{dt}$ .



Obr. 41 : Dvojkapacitná elektronická sústava

Z Ohmovho a z Kirchhoffových zákonov tiež platí :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_1 i_1 + u_2, \quad i_1 = i_2 + i_{c1}, \quad i_{c1} = i_1 = C_1 \frac{du_2}{dt}, \quad i_2 \geq 0 \\
 u_2 &= R_2 i_2 + u_3 = R_2 C_2 \frac{du_3}{dt} + u_3, \quad \frac{du_2}{dt} = R_2 C_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{du_3}{dt} \\
 u_1 &= R_1 i_1 + u_2 = R_1 (i_2 + i_{c1}) + u_2 = R_1 C_2 \frac{du_3}{dt} + R_1 C_1 \frac{du_2}{dt} + u_2
 \end{aligned}$$

Ak dosadíme za  $u_2$  a  $du_2/dt$ , dostaneme :

$$u_1 = R_1 C_2 \frac{du_3}{dt} + R_1 C_1 \left( R_2 C_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{du_3}{dt} \right) + R_2 C_2 \frac{du_3}{dt} + u_3,$$

odkiaľ po úprave dostávame nehomogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, ktorá je matematickým modelom v implicitnom tvare pre uvedenú dvojkapacitnú sústavu :

$$T_1 T_2 u_3''(t) + (T_1 + T_2 + T_{12}) u_3'(t) + u_3(t) = u_1(t) \quad (57)$$

s časovými konštantami  $T_1 = R_1 C_1$ ,  $T_2 = R_2 C_2$ ,  $T_{12} = R_1 C_2$ .

### 2.1.4 Spätná Laplaceova transformácia

Pre spätnú (inverznú) Laplaceovu transformáciu sme už uviedli vzťah (21). Pri praktických výpočtoch sa však väčšinou postupuje pri spätnej Laplaceovej transformácii pomocou slovníka. K tomu však budeme musieť výraz obrazu zjednodušiť - najčastejšie jeho rozkladom na parciálne zlomky, pričom budeme vychádzať z koreňov charakteristickej rovnice.

Spätná Laplaceova transformácia nás bude zaujímať jednak pri riešení časových originálov  $f(t)$  k Laplaceovým obrazom prenosových funkcií

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (58)$$

alebo pri riešení diferenciálnych rovníc popisujúcich vzťah medzi vstupnými a výstupnými funkciami systému. Teda ide o diferenciálne rovnice typu :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (59)$$

teda aj s deriváciami vstupnej funkcie, alebo aj bez derivácií vstupnej funkcie :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (60)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  sú konštantné koeficienty,  $y(t)$  je výstupnou veličinou, ktorú máme určiť a  $u(t)$  je vstupnou veličinou.

Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice (60) pomocou vzťahu pre transformáciu derivácií funkcií

$$L[f^{(n)}(t), s] = s^n F(s) \quad (61)$$

napríklad za predpokladu nulových počiatočných podmienok, ináč je nutné počiatočné podmienky zohľadniť podľa vzťahu

$$L[f^{(n)}(t), s] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (62)$$

dostaneme :

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = U(s). \quad (63)$$

Za  $U(s)$  je nutné dosadiť Laplaceov obraz konkrétnej funkcie  $u(t)$ . Odkiaľ potom dostávame :

$$Y(s) = \frac{U(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (64)$$

Postup bude pre oba prípady (za predpokladu nulových počiatočných podmienok) podobný a ukážeme si ho na príkladoch pre rôzne druhy koreňov charakteristickej rovnice.

a) Reálne rôzne korene charakteristickej rovnice

Ak má charakteristická rovnica, polynóm menovateľa obrazového prenosu (58),  $n$  reálnych rôznych koreňov  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n-1}, s_n$ , potom tento prenos môžeme napísať v tvare :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) \dots (s - s_n)} \frac{1}{a_n} \quad (65)$$

alebo

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[ \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C}{s - s_3} + \dots + \frac{N}{s - s_n} \right] \frac{1}{a_n}. \quad (66)$$

Hodnoty konštant  $A, B, C, \dots, N$  určíme nasledovne :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{1}{(s - s_2)(s - s_3) \dots (s - s_n)} \frac{1}{a_n}, \\ B &= \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_3) \dots (s - s_n)} \frac{1}{a_n}, \\ &\vdots \\ N &= \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_{n-1})} \frac{1}{a_n}, \end{aligned} \quad (67)$$

alebo môžeme využiť aj klasický postup – dať na spoločného menovateľa a porovnať členy pri rovnakých mocninách.



Hodnoty konštánt A,B,...,N dosadíme späť do rovnice :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[ \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{s-s_3} + \dots + \frac{N}{s-s_n} \right] \frac{1}{a_n} \quad (68)$$

a pomocou slovníka vyhladáme časové originály k dielčím obrazom. Takýmto obrazom, ako sa vyskytujú v týchto parciálnych zlomkoch odpovedajú podľa slovníka v časovej oblasti exponenciálne funkcie. Celkové riešenie  $f(t)$  (alebo podobne aj  $y(t)$ ) bude mať tvar :

$$f(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} + \dots + N e^{s_n t} . \quad (69)$$

**Príklad 3 :** Je potrebné nájsť Laplaceov obrazový prenos, jeho originál v časovej oblasti a tiež aj riešenie diferenciálnej rovnice systému popísaného ďalej uvedenou diferenciálnou rovnicou tretieho rádu za predpokladu nulových počiatkových podmienok a pre vstupnú funkciu  $u(t)=1$  :

$$y'''(t) + 6 y''(t) + 11 y'(t) + 6 y(t) = u(t) \quad (70)$$

- 1) Určenie Laplaceovho obrazového prenosu  $F(s)$  :

Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostaneme

$$s^3 Y(s) + 6 s^2 Y(s) + 11 s Y(s) + 6 Y(s) = U(s) ,$$

odkiaľ na základe definície obrazového prenosu dostaneme aj Laplaceov obrazový prenos danej sústavy :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6} .$$

- 2) Určenie originálu  $f(t)$  k Laplaceovmu obrazovému prenosu  $F(s)$  :

Korene polynómu menovateľa - charakteristickej rovnice - sú  $s_1 = -1$  ,  $s_2 = -2$  ,  $s_3 = -3$  , teda :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(s+2)(s+3)} , \quad B = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{(s+1)(s+3)} , \quad C = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Teda  $A=1/2$ ,  $B=-1$ ,  $C=1/2$  a obrazový prenos po rozklade na parciálne zlomky má tvar :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,5}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{0,5}{s+3}$$

Po nájdení originálov ku jednotlivým častiam obrazového prenosu dostávame originál  $f(t)$  :

$$f(t) = 0,5 e^{-t} - e^{-2t} + 0,5 e^{-3t}$$

Funkciu  $f(t)$ , ktorá je originálom obrazového prenosu  $F(s)$ , budeme neskôr označovať ako *impulznú funkciu* alebo aj *váhovú funkciu* a táto funkcia predstavuje významnú dynamickú charakteristiku daného systému.

3) Určenie riešenia  $y(t)$  danej diferenciálnej rovnice :

Za predpokladu nulových počiatkových podmienok a pre vstupnú funkciu  $u(t)=1$  po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostaneme :

$$s^3 Y(s) + 6 s^2 Y(s) + 11 s Y(s) + 6 Y(s) = \frac{1}{s}$$

odkiaľ pre  $Y(s)$  platí :

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6} \frac{1}{s}$$

Korene polynómu menovateľa - charakteristickej rovnice - sú  $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3, s_4 = 0$ , teda :

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)s} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{(s+2)(s+3)s}, \quad B = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{(s+1)(s+3)s},$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{1}{(s+1)(s+2)s}, \quad D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Teda  $A = -1/2, B = 1/2, C = -1/6, D = 1/6$  a Laplaceov obraz riešenia diferenciálnej rovnice po rozklade na parciálne zlomky má tvar :

$$Y(s) = -\frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1/6}{s+3} + \frac{1/6}{s},$$

odkiaľ po nájdení originálov k jednotlivým častiam riešenia v slovníku dostaneme originál riešenia diferenciálnej rovnice v časovej oblasti :

$$y(t) = -0,5 e^{-t} + 0,5 e^{-2t} - 1/6 e^{-3t} + 1/6$$

Z uvedeného príkladu je možné vidieť jednoduchosť riešenia diferenciálnej rovnice aj tretieho rádu, čo by klasickým postupom zabralo viac miesta a času.

b) Reálne viacnásobné korene charakteristickej rovnice

Nech jeden z koreňov charakteristickej rovnice je  $n$ -násobný a ostatné korene sú reálne rôzne. Rozklad na parciálne zlomky pre časť zodpovedajúcu reálnym rôznym koreňom je rovnaká ako v predošlom prípade a časť zodpovedajúca viacnásobnému koreňu má tvar :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left[ \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_1)^2} + \frac{C}{(s-s_1)^3} + \dots + \frac{N}{(s-s_1)^n} + \dots \right] \frac{1}{a_n}.$$

Po vypočítaní konštánt  $A, \dots, N, \dots$  bude mať časový originál tvar :

$$f(t) = A e^{s_1 t} + B t e^{s_2 t} + \dots + \frac{N}{n!} t^{N-1} e^{s_n t} + \dots$$

**Príklad 4 :** Je potrebné nájsť originál  $f(t)$  v časovej oblasti ku obrazovému prenosu  $F(s)$ , ktorého pólmí je kombinácia jedného jednoduchého reálneho koreňa a jedného dvojnásobného reálneho koreňa.

$$F(s) = \frac{3}{s^3 - 5s^2 + 8s - 4} = \frac{3}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} .$$

Konštanty  $A, B, C$  určíme úpravou na spoločného menovateľa a porovnaním pri rovnakých mocninách  $s$ :

$$\begin{aligned} 3 &= A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1) , \\ 3 &= s^2 A - 4sA + 4A + s^2 B - 3sB + 2B + sC - C \Rightarrow \\ 0 &= A + B , \quad 0 = -4A - 3B + C , \quad 3 = 4A + 2B - C \Rightarrow \\ A &= 3 , \quad B = -3 , \quad C = 3 , \\ F(s) &= \frac{3}{s-1} - \frac{3}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2} , \end{aligned}$$

odkiaľ dostaneme s využitím slovníka originál  $f(t)$  :

$$f(t) = 3 ( e^t - e^{2t} + t e^{2t} ) .$$

c) Komplexne združené korene charakteristickej rovnice

Ak niektoré z koreňov charakteristickej rovnice sú komplexne združené a ostatné sú reálne rôzne alebo  $n$ -násobné, potom rozklad na parciálne zlomky robíme tak, aby ich tvary odpovedali obrazom sínusových a kosínusových funkcií v slovníku. Tak upravíme koreňové činitele zodpovedajúce komplexne združeným koreňom.

Ďalšou možnosťou je urobiť rozklad ako v prípade reálnych rôznych koreňov, ale za jednotlivé korene dosadíme korene komplexne združené. Pri výpočte koeficientov určite dostaneme len reálne čísla. Riešenie v časovej oblasti bude v tvare exponenciálnych funkcií s komplexnými číslami v exponentoch. Po úprave s využitím Eulerových vzorcov dostaneme hľadané riešenie v časovej oblasti s exponenciálami a trigonometrickými funkciami.

**Príklad 5 :** Je potrebné nájsť originál  $f(t)$  v časovej oblasti ku obrazovému prenosu  $F(s)$ , ktorého pólmí je kombinácia jedného jednoduchého reálneho koreňa a jedného komplexne združeného koreňa.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8} \quad \text{teda } s_{1,2} = -2 \pm 2i , \quad s_3 = 0 , \\ F(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+2-2i)(s+2+2i)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+2)^2+4} . \end{aligned}$$

Konštanty  $A, B, C$  určíme úpravou na spoločného menovateľa a porovnaním pri rovnakých mocninách  $s$ :

$$0 = A + B , \quad 1 = 4A + C , \quad 1 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{8} , \quad B = -\frac{1}{8} , \quad C = \frac{1}{2}$$

$$F(s) = \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} \frac{s-4}{(s+2)^2+4} = \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} \frac{s+2-6}{(s+2)^2+4} ,$$

$$F(s) = \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} \left( \frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} - 3 \frac{2}{(s+2)^2+2^2} \right) ,$$

odkiaľ po spätnej Laplaceovej transformácii s pomocou slovníka dostaneme originál  $f(t)$  :

$$f(t) = \frac{1}{8} [1 - e^{-2t} (\cos 2t - 3 \sin 2t)]$$

Riešenie pomocou Laplaceovej transformácie bolo aj v tomto prípade oveľa jednoduchšie ako s využitím klasických metód riešenia diferenciálnych rovníc.

### 2.1.5 Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou simulačného systému SIPRO

Pre riešenie diferenciálnych rovníc pomocou počítača sa dá veľmi vhodne využiť simulačný systém SIPRO [52], [53]. Stručný popis jeho najdôležitejších blokov je uvedený v prílohe (PRÍLOHA B) v Tab. 5, Tab. 6. Ako výsledok riešenia poskytuje SIPRO číselné hodnoty priebehu funkcie alebo jej grafické zobrazenie. Ďalšou možnosťou je grafické zobrazenie stavového grafu alebo rozšíreného stavového grafu. Použitie simulačného systému SIPRO si ukážeme na konkrétnom príklade.

**Príklad 6 :** Úlohou je nájsť numerické riešenie diferenciálnej rovnice (71) a jeho grafické zobrazenie pre čas riešenia 30s a krok riešenia 0,1s a pre  $u(t)=1$ .

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) . \tag{71}$$

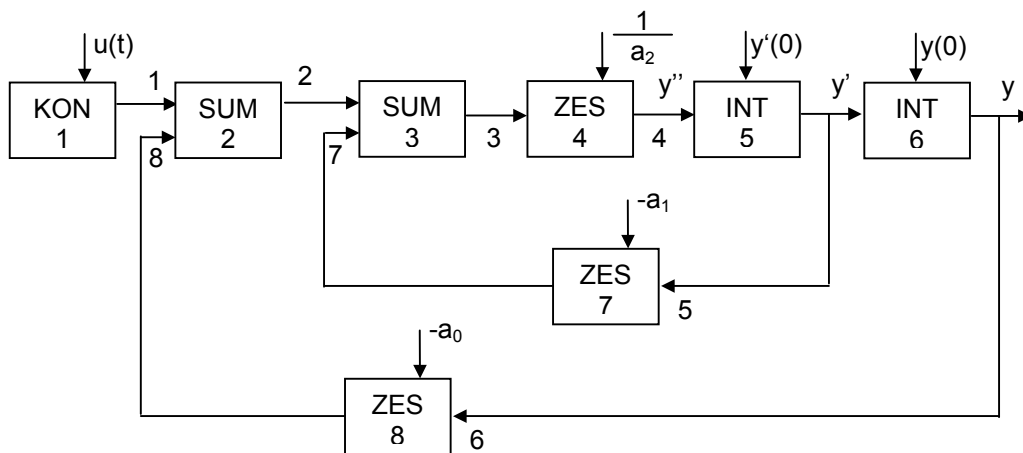
Túto úlohu si budeme pomocou simulačného systému SIPRO riešiť dvoma spôsobmi :

#### 1. Metóda postupnej integrácie

Pri tomto riešení budeme najprv postupovať tak, že si z diferenciálnej rovnice (71) vyjadríme najvyššiu deriváciu :

$$y''(t) = \frac{u(t) - a_1 y'(t) - a_0 y(t)}{a_2} . \tag{72}$$

Ak veličinu  $y''(t)$  dvakrát integrujeme v blokoch INT, získame  $y'(t)$  a  $y(t)$ , čím máme vytvorené predpoklady pre modelovanie pravej strany rovnice (72). Keďže budiaca funkcia  $u(t)=1$  je konštanta, použijeme na jej generovanie blok KON. Pre namodelovanie celej pravej strany rovnice (72) potrebujeme ešte dva sčítacie bloky SUM a dva zosilňovače ZES (Obr. 42).



Obr. 42 : Simulačná schéma pre riešenie diferenciálnej rovnice v SIPRO.

Nastavenie času riešenia, kroku riešenia a požadovaných výstupov urobíme priamo v menu simulačného systému SIPRO, kde si zvolíme aj potrebnú formu prezentácie výsledkov. Graf

riešenia pre  $a_2=4$ ,  $a_1=2$ ,  $a_0=1$  je zhodný s grafom na Obr. 45. Pre vyšetovanie prechodovej charakteristiky a určenie jej inflexného bodu si môžeme dať zobrazit' aj priebehy prvej a druhej derivácie výstupnej funkcie (bloky 4 a 5 na Obr. 42). Podľa uvedeného postupu si čitateľ veľmi ľahko urobí schému aj pre riešenie diferenciálnej rovnice nižšieho alebo vyššieho rádu.

2. Metóda prenosových funkcií

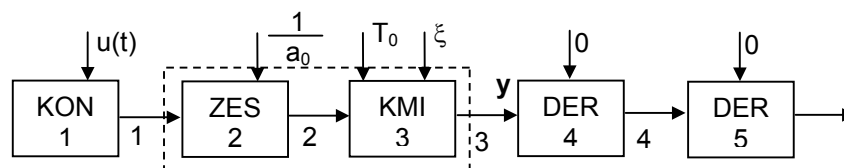
Pri riešení pomocou metódy prenosových funkcií si z diferenciálnej rovnice (71) vyjadríme obrazový prenos zodpovedajúcej sústavy :

$$F(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \tag{73}$$

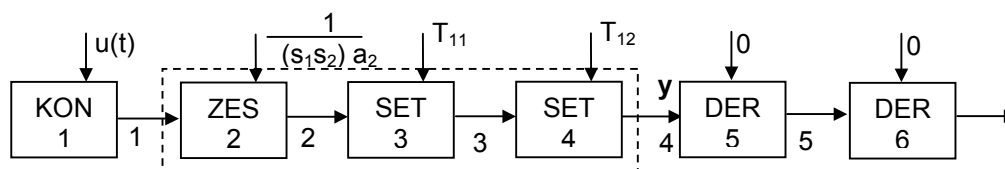
ktorý v prípade, že diskriminant charakteristickej rovnice je  $D \leq 0$ , upravíme na tvar :

$$F(s) = \frac{1}{a_0} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_0}} s\right)^2 + 2 \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} s + 1} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{(T_0 s)^2 + 2 \xi T_0 s + 1}. \tag{74}$$

Tomuto prípadu zodpovedá simulačná bloková schéma na Obr. 43 a) s využitím bloku KMI. Pre získanie prvej a druhej derivácie výstupnej veličiny je možné využit' bloky DER.



a) bloková schéma pre prípad kmitavého prechodového deja



b) bloková schéma pre prípad nekmitavého prechodového deja

Obr. 43 : Riešenie diferenciálnej rovnice v SIPRO metódou prenosových funkcií.

V prípade, že diskriminant charakteristickej rovnice  $D > 0$ , upravíme obrazový prenos na tvar :

$$F(s) = \frac{1}{a_2 s_1 s_2} \frac{1}{\left(-\frac{1}{s_1} s + 1\right) + \left(-\frac{1}{s_2} s + 1\right)}. \tag{75}$$

Tomuto prípadu zodpovedá simulačná bloková schéma na Obr. 43 b), ktorá využíva dva bloky SET. Pre získanie prvej a druhej derivácie výstupnej veličiny je možné aj tu využit' bloky DER. Samozrejme, že v simulačnom systéme SIPRO sa dá namodelovať aj analytické riešenie uvedenej diferenciálnej rovnice.

## 2.1.6 Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou simulačného systému MATLAB

Simulačný systém MATLAB je veľmi výkonný a rozsiahly programový prostriedok nielen na riešenie diferenciálnych rovníc, ale aj na veľké množstvo iných úloh z teórie automatického riadenia [43], [75], [76], [77]. Stručný popis jeho najdôležitejších príkazov a funkcií je uvedený v prílohe (PRÍLOHA C) v Tab. 7 až Tab. 12. Tak isto poskytuje viaceré možnosti pre grafické zobrazenie výsledkov.

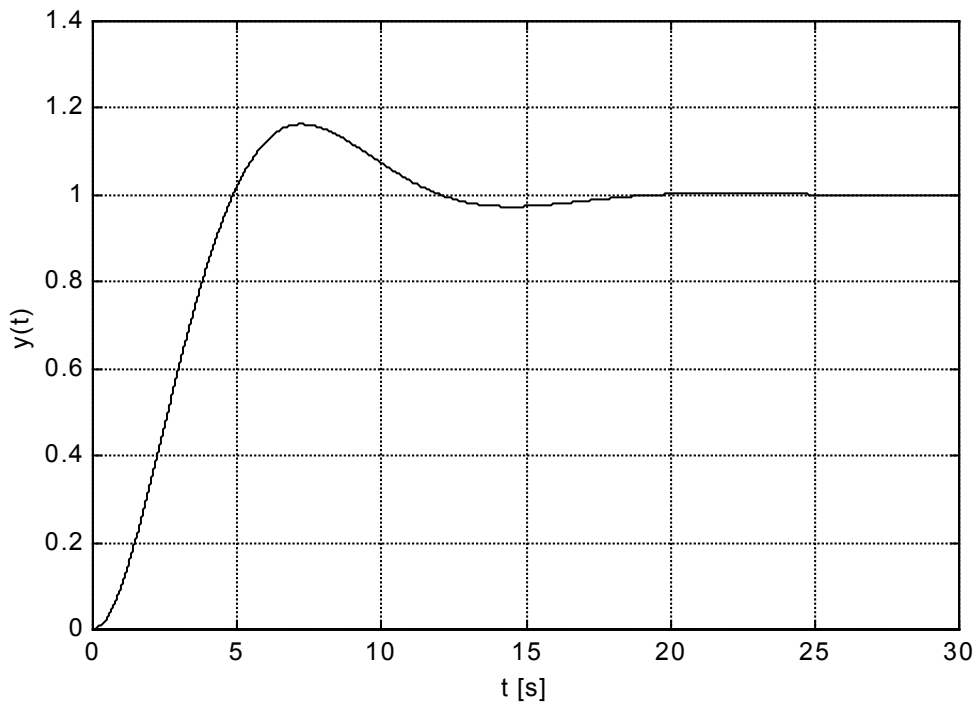
**Príklad 7 :** Použitie simulačného systému MATLAB si ukážeme na riešení diferenciálnej rovnice z predošlého príkladu 6. Úlohou je teda nájsť numerické riešenie diferenciálnej rovnice (71) a jeho grafické zobrazenie pre koeficienty  $a_2=4$ ,  $a_1=2$ ,  $a_0=1$ , čas riešenia 30s a krok riešenia 0,1s a pre  $u(t)=1$ . Z veľkého množstva možností riešenia tejto úlohy je jedna uvedená na Obr. 44 a graf riešenia na Obr. 45.

```

% prechodová charakteristika
cit=[1];           % koeficienty polynómu čitateľa
men=[4 2 1.0];    % koeficienty polynómu menovateľa
t=[0:0.1:30];     % čas a časový krok riešenia
sys=tf(cit,men);  % vytvorenie prenosovej funkcie
h=step(sys,t);    % výpočet prechodovej charakteristiky
plot(t,h);        % vykreslenie prechodovej charakteristiky
grid;
xlabel('t [s]');
ylabel('y(t)');
print -deps  Obra1.eps % uloženie obrázku vo formáte EPS
print -dbitmap Obra1.bmp % uloženie obrázku vo formáte BMP
end

```

Obr. 44 : Príkazový súbor pre riešenie odozvy systému pomocou MATLABu



Obr. 45 : Grafické zobrazenie odozvy systému

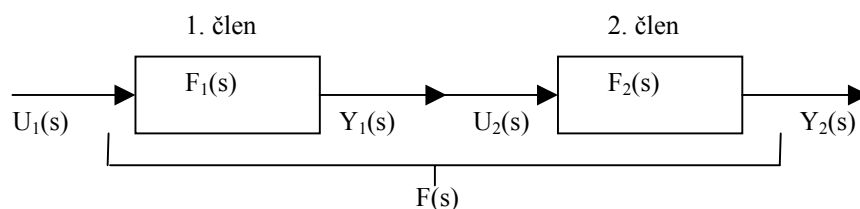
## 2.1.7 Algebra prenosov

Ako to bolo uvedené už aj napríklad na Obr. 8, v blokových schémach regulačných obvodov sa jednotlivé členy obvodu nahradzujú blokmi, v ktorých je vpísaný ich obrazový prenos, vyjadrený pomocou Laplaceovej transformácie. Smer šírenia sa signálov označujeme šípkami. V regulačných obvodoch sa vyskytujú tri základné zapojenia :

- 1.) zapojenie sériové, alebo zapojenie za sebou,
- 2.) zapojenie paralelné, alebo zapojenie vedľa seba,
- 3.) zapojenie antiparalelné.

### 2.1.7.1 Sériové zapojenie členov

Pri sériovom zapojení členov, alebo zapojení členov za sebou, je výstupný signál z prvého člena vstupným signálom druhého člena (Obr. 46).



Obr. 46 : Sériové zapojenie členov

Teda platí :  $Y_1(s) = U_2(s)$  a z definície obrazových prenosov vyplýva :

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Rightarrow U_2(s) = F_1(s) U_1(s)$$

$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \Rightarrow Y_2(s) = F_2(s) U_2(s)$$

Po dosadení dostaneme  $Y_2(s) = F_2(s) F_1(s) U_1(s)$ , odkiaľ pre výsledný obrazový prenos celého zapojenia dostaneme :

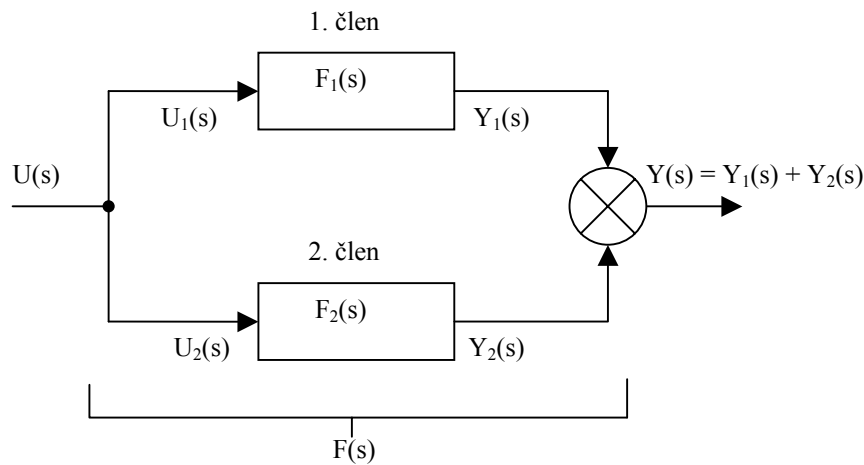
$$F(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{F_2(s) F_1(s) U_1(s)}{U_1(s)} = F_2(s) F_1(s) \quad (76)$$

Výsledný obrazový prenos dvoch alebo aj  $n$ -členov zapojených za sebou je rovný súčinu prenosov jednotlivých členov celého zapojenia.

### 2.1.7.2 Paralelné zapojenie členov

Paralelné zapojenie členov, alebo zapojenie členov vedľa seba si vyžaduje ďalší druh prenosového článku, ktorý z dvoch alebo viacerých prichádzajúcich signálov vytvára ich algebraický súčet alebo rozdiel (Obr. 8, Obr. 47). Nazývame ho *zmiešavač*. Označuje sa krúžkom rozdeleným na štyri časti, ktoré odpovedajú jednotlivým vstupom a výstupom.

Vstupný signál je v paralelnom zapojení rovnaký pre oba prenosové články. Zaujímá nás výsledný prenos takého zapojenia (Obr. 47).



Obr. 47 : Paralelné zapojenie členov

Platí  $Y(s) = Y_1(s) + (-) Y_2(s)$ ,  $U(s) = U_1(s) = U_2(s)$  a z definície prenosov vyplýva :

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = F_1(s) U_1(s) = F_1(s) U(s)$$

$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_2(s) = F_2(s) U_2(s) = F_2(s) U(s)$$

Pre výstup zo zmiešavača platí  $Y(s) = Y_1(s) + (-) Y_2(s)$  a po dosadení za  $Y_1(s)$ ,  $Y_2(s)$  dostávame pre  $Y(s) = F_1(s) U(s) + (-) F_2(s) U(s)$ . Odkiaľ pre výsledný prenos platí :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{[ F_1(s) \pm F_2(s) ] U(s)}{U(s)} = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (77)$$

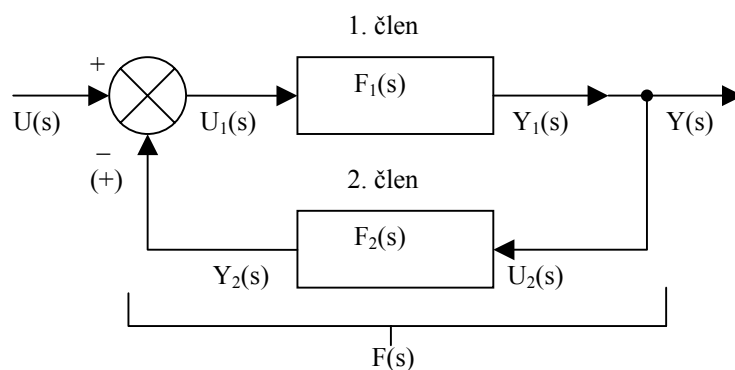
Teda výsledný obrazový prenos dvoch alebo aj  $n$ -členov zapojených paralelne je rovný súčtu (rozdielu) prenosov jednotlivých členov.

### 2.1.7.3 Antiparalelné zapojenie členov

Je to vlastne zapojenie jednoduchého spätnoväzobného obvodu (Obr. 48). Výstupná veličina prvého člena sa znovu privádza na jeho vstup cez druhý člen s prenosom  $F_2(s)$ , ktorý môže byť aj jednotkový. V tomto prípade hovoríme o spätnej väzbe, ktorá pri znamienku mínus znamená *zápornú spätnú väzbu* a pri znamienku plus znamená *kladnú spätnú väzbu*.

Pri odvodzovaní výsledného prenosu dodržiavame zásadu, že pri písaní rovníc postupujeme vždy smerom sprava doľava, teda od výstupnej veličiny postupne k vstupnej veličine.





Obr. 48 : Antiparalelné zapojenie členov

Pre výstup zo zmiešavača platí  $U_1(s) = U(s) - (+) Y_2(s)$  a platí ďalej aj  $Y_1(s) = Y(s) = U_2(s)$ . Z definície prenosov vyplýva :

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = F_1(s) U_1(s)$$

$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_2(s) = F_2(s) U_2(s)$$

a potom pre jednotlivé veličiny platí :

$$U_1(s) = U(s) - (+) Y_2(s) = U(s) - (+) F_2(s) U_2(s)$$

$$Y_1(s) = F_1(s) U_1(s) = F_1(s) [U(s) - (+) F_2(s) U_2(s)] = Y(s) \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = F_1(s) [U(s) - (+) F_2(s) Y(s)] = F_1(s) U(s) - (+) F_1(s) F_2(s) Y(s)$$

a tiež platí :

$$F_1(s) U(s) = Y(s) + (-) F_1(s) F_2(s) Y(s) = Y(s) [1 + (-) F_1(s) F_2(s)]$$

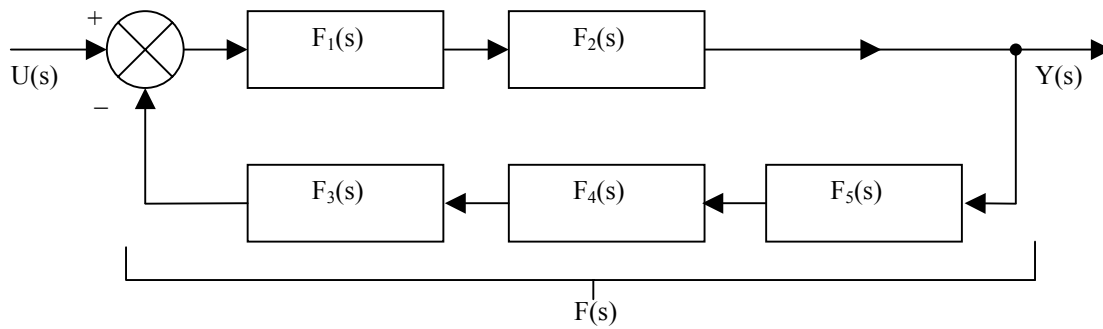
Odkiaľ pre výsledný obrazový prenos dostaneme :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + (-) F_1(s) F_2(s)} \quad (78)$$

Teda výsledný obrazový prenos spätnoväzobného obvodu je rovný zlomku, v ktorého čitateli je výsledný prenos v priamej vetve a v menovateli je jednička a plus alebo mínus výsledný prenos v priamej a spätnoväzobnej vetve. *Priama vetva* je od vstupu po výstup a *spätná vetva* je od výstupu po vstup, samozrejme v smere toku signálu v danej vetve. Ako uvidíme neskôr, regulačný obvod môže mať aj viac vstupov alebo výstupov. Potom aj obrazový prenos, aj priame vetvy a spätné vetvy musíme uvažovať vzhľadom na zodpovedajúce vstupy a výstupy.

Uvedené tri druhy zapojenia členov sú základné a umožňujú určiť pomocou algebry prenosov aj celkový prenos zložitého systému, skladajúceho sa z určitého počtu takýchto základných typov zapojení.

**Príklad 8 :** S využitím algebry prenosov je potrebné určiť výsledný obrazový prenos  $F(s)$  pre regulačný obvod podľa obrázku (Obr. 49).



Obr. 49 : Príklad na aplikáciu algebry prenosov

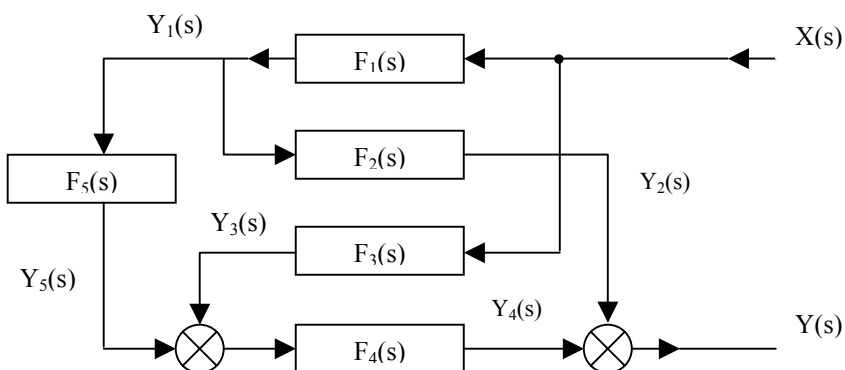
V priamej vetve sú zapojené v sérii dva prenosové články a v spätnej vetve sú v sérii zapojené tri prenosové články. Po aplikácii uvedenej definície pre antiparalelné zapojenie a pravidiel pre jednotlivé typy zapojení dostaneme veľmi ľahko výsledný obrazový prenos uvedeného zapojenia :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F_1(s) F_2(s)}{1 + F_1(s) F_2(s) F_3(s) F_4(s) F_5(s)}$$

#### 2.1.7.4 Transformácia štruktúrálnych schém

V blokových schémach sa často vyskytujú prípady, keď si zjednodušenie a názornosť alebo ľahší formálny popis, vyžaduje zásahy do pôvodnej schémy vo forme preskupovania uzlov, sčítacích členov, zmeny vlastností jednotlivých blokov apod. Tá istá problematika nastáva pri úpravách štruktúrálnych schém, ktoré dostávame na základe analýzy konkrétnych prvkov, tvoriacich regulačné obvody. Transformáciu štruktúrálnej schémy si ukážeme na konkrétnom príklade. Z dôvodu stručnejšieho zápisu nebudeme v ďalšom vždy uvádzať premennú  $s$ .

**Príklad 9 :** Je daný zložitý obvod vytvorený z prenosových článkov  $F_1, F_2, F_3, F_4$  a  $F_5$  a z dvoch zmiešavačov podľa nasledujúceho obrázku :



Úlohou je nahradiť túto schému jednoduchšou. Celý tento obvod si popíšeme rovnicami :

$$Y(s) = Y_2(s) + Y_4(s), \quad Y_2(s) = F_2(s) Y_1(s), \quad Y_4(s) = F_4(s) (Y_3(s) + Y_5(s)),$$

$$Y_3(s) = F_3(s) X(s), \quad Y_5(s) = F_5(s) Y_1(s), \quad Y_1(s) = F_1(s) X(s).$$

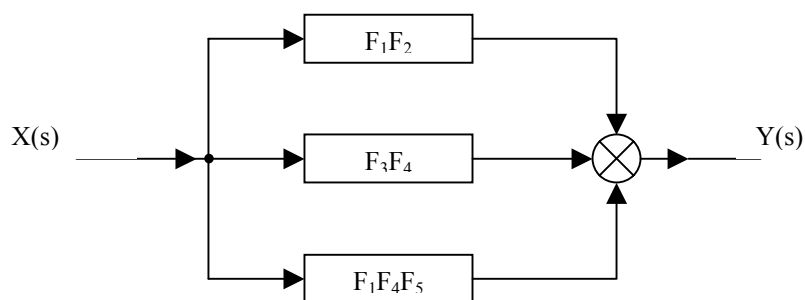
Táto sústava rovníc sa ďalej upravuje, kým nedostaneme závislosť medzi Y a X :

$$\begin{aligned}
 Y_5(s) &= F_5(s)F_1(s)X(s) \\
 Y_3(s) &= F_3(s)X(s) \\
 Y_4(s) &= F_4(s)[F_3(s)X(s) + F_5(s)F_1(s)X(s)] = \\
 &= F_4(s)[F_3(s) + F_1(s)F_5(s)]X(s)
 \end{aligned}$$

Pre výstupnú veličinu Y(s) platí :

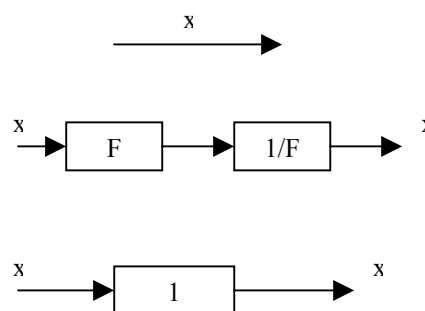
$$\begin{aligned}
 Y(s) &= F_2(s)F_1(s)X(s) + F_4(s)[F_3(s) + F_1(s)F_5(s)]X(s) = \\
 &= [F_1F_2 + F_3F_4 + F_1F_4F_5]X(s)
 \end{aligned}$$

Z posledného vzťahu priamo vyplýva náhradná štruktúra pôvodného obvodu nasledujúcou štruktúrou s tromi paralelne zapojenými blokmi :



V nasledujúcom si uvedieme niektoré ďalšie možnosti a pravidlá transformácie štruktúrnych schém regulačných obvodov, ale najprv si uvedieme niektoré obraty používané pri úprave blokových schém :

### 1.) Spojovacia linka

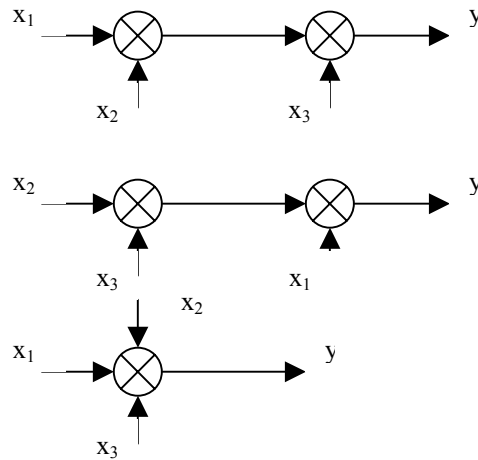


Obr. 50 : Spojovacia linka

Spojovacia linka sa môže nahradzovať dvoma sériovo zapojenými blokmi s ľubovoľnými prenosmi navzájom inverznými alebo jedným blokom s jednotkovým prenosom a obrátene (Obr. 50) tak, že signál x(t), prenášaný spojovacou linkou, sa nemodifikuje.

$$X = F \frac{1}{F} X = 1 X \tag{79}$$

2.) Zmena poradia sčítavania alebo počtu sčítacích miest



Obr. 51 : Zmena poradia sčítavania alebo počtu sčítacích miest

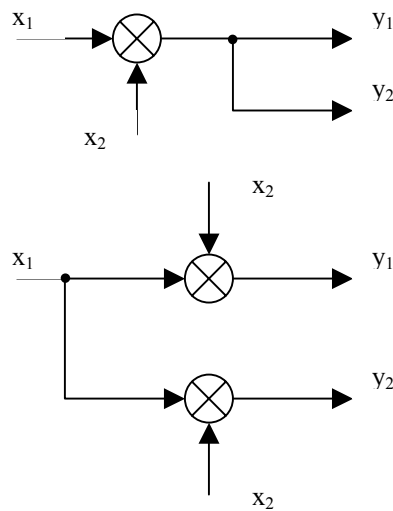
Pri zmene poradia sčítavania alebo pri zmene počtu sčítacích miest (Obr. 51) vychádzame z platnosti nasledujúcich rovníc :

$$Y = (X_1 + X_2) + X_3$$

$$Y = (X_2 + X_3) + X_1$$

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

3.) Zmena poradia sčítacieho miesta a rozvetvenia signálu



Obr. 52 : Zmena poradia sčítacieho miesta a rozvetvenia signálu

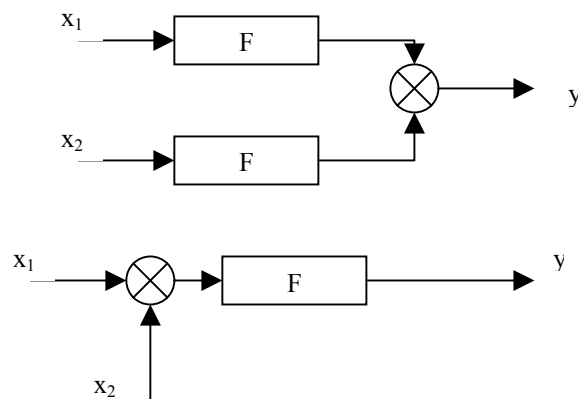
Pri zmene poradia sčítacieho miesta a rozvetvenia signálu (Obr. 52) platia rovnice :

$$y_1 = y_2 = x_1 + x_2$$

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

4.) Zmena poradia sčítacieho miesta a bloku pre dva signály



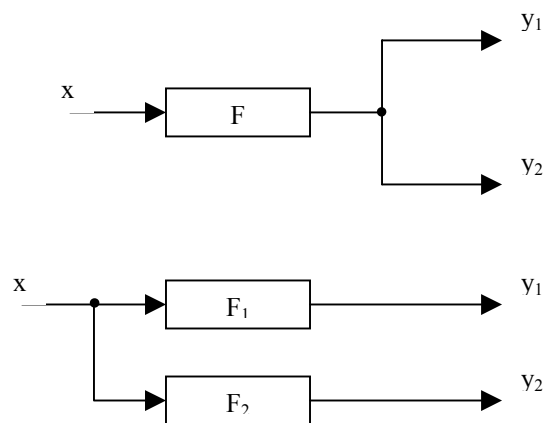
Obr. 53 : Zmena poradia sčítacieho miesta a bloku pre dva signály

Pri zmene poradia sčítacieho miesta a bloku s prenosom  $F$  pre dva signály (Obr. 53) platia rovnice :

$$Y = FX_1 + FX_2 = F(X_1 + X_2)$$

$$Y = F(X_1 + X_2)$$

5.) Prenesenie rozvetvovacieho miesta pred blok



Obr. 54 : Prenesenie rozvetvovacieho miesta pred blok

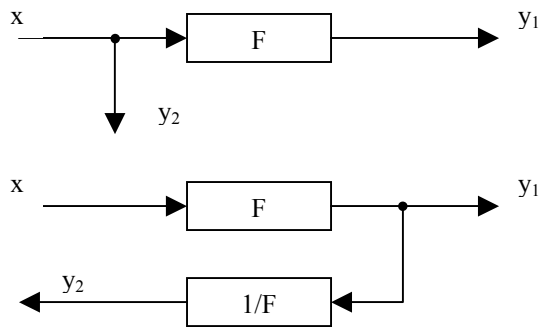
Pri prenesení rozvetvovacieho miesta pred blok (Obr. 54) platia rovnice :

$$Y_1 = Y_2 = FX$$

$$Y_1 = F_1X$$

$$Y_2 = F_2X, F_1 = F_2 = F$$

6.) Prenesenie rozvetvovacieho miesta za blok



Obr. 55 : Prenesenie rozvetvovacieho miesta za blok

Pri prenesení rozvetvovacieho miesta za blok (Obr. 55) platia rovnice :

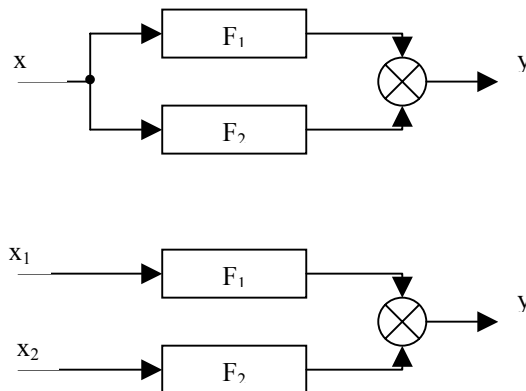
$$Y_1 = F X$$

$$Y_2 = X$$

$$Y_1 = F X$$

$$Y_2 = \frac{1}{F} F X = X$$

7.) Zmena paralelného zapojenia blokov



Obr. 56 : Zmena paralelného zapojenia blokov

Paralelné zapojenie blokov s prenosom  $F_1$  a  $F_2$  sa mení na semiparalelné pri súčasnom zavedení vzt'ahu rovnosti pre oba vstupné signály (Obr. 56), pričom platia rovnice :

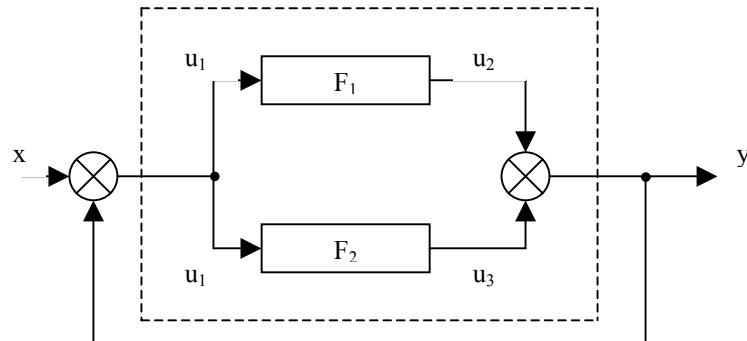
$$Y = F_1 X + F_2 X$$

$$Y = F_1 X_1 + F_2 X_2$$

$$X_1 = X_2 = X$$

V ďalšom si uvedieme niekoľko príkladov na úpravy blokových schém.

**Príklad 10 :** Majme schému zloženú z dvoch blokov s prenosmi  $F_1$  a  $F_2$  podľa nasledujúceho obrázku :



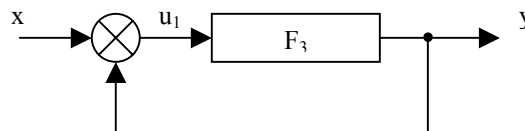
Pre dané zložené zapojenie platí pre výstupnú veličinu  $Y$  v čiarkovom bloku :

$$U_2 = F_1 U_1$$

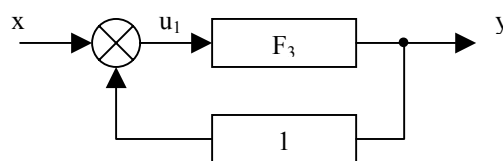
$$U_3 = F_2 U_1$$

$$Y = U_2 + U_3 = (F_1 + F_2) U_1$$

Paralelné zapojenie blokov  $F_1$ ,  $F_2$  sa nahradí jediným blokom s prenosom  $F_3 = F_1 + F_2$  :



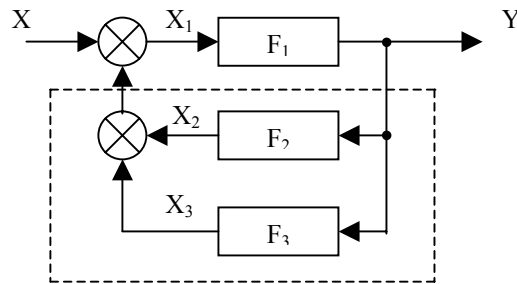
Do spätnej väzby sa vloží blok s prenosom "1" :



Výsledná schéma je základnou spätňoväzobnou, pre ktorú platia rovnice :

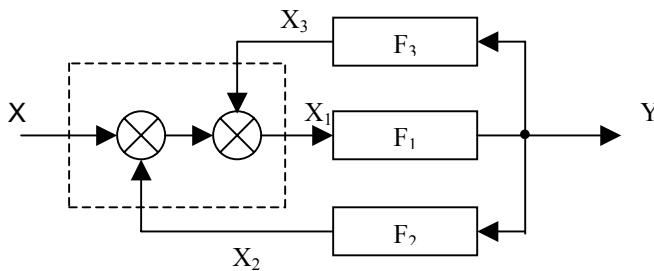
$$Y = \frac{F_3}{1 - F_3} X = \frac{F_1 + F_2}{1 - F_1 - F_2} X$$

**Príklad 11 :** Majme schému zloženú z troch blokov s prenosmi  $F_1$ ,  $F_2$ , a  $F_3$  podľa nasledujúceho obrázku, pričom čiarkovane ohraničené bloky chceme nahradiť jedným blokom :



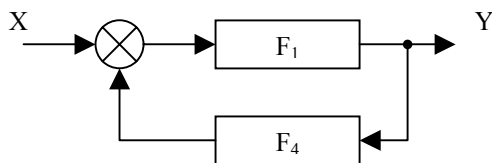
$$X_1 = (X + X_2) + X_3$$

Najprv zmeníme poradie sčítavania signálov :



$$X_1 = X + (X_2 + X_3)$$

Paralelné zapojenie blokov  $F_2$  a  $F_3$  sa nahradí jediným blokom s prenosom  $F_4$  :



$$F_4 = F_2 + F_3$$

$$Y = \frac{F_1}{1 - F_1 F_4} X = \frac{F_1}{1 - F_1 (F_2 + F_3)} X$$

Uvedená výsledná schéma na predošlom obrázku je znova základnou spätnoväzobnou schémou.

Pomocou blokovej algebry je možné ľahko transformovať pôvodnú schému podľa potreby na vhodnejšie schémy pri zachovaní rovnakého prenosu celého systému, alebo je možné prenos ešte upravovať, ako je to vidieť aj z uvedených príkladov.

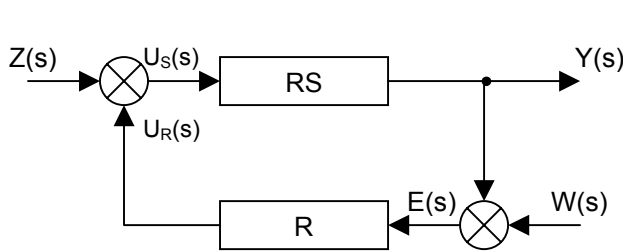
### 2.1.7.5 Prenos riadenia a prenos poruchy

Spätnoväzobný obvod má v teórii riadenia veľmi významné miesto. Preto si v ďalšej časti urobíme podrobnejšiu analýzu spätnoväzobného obvodu. Schému jednoduchého spätnoväzobného obvodu sme už uviedli viackrát, napríklad aj na Obr. 48. Takýto spätnoväzobný obvod sa skladá z *priamej prenosovej cesty (vetvy)*, ktorú predstavuje prenos  $F_1(s)$  a zo *spätnej prenosovej cesty* s prenosom  $F_2(s)$ .

Najčastejšou realizáciou spätnej väzby v riadiacej technike je *regulačný obvod*, čo je v podstate spätnoväzobný obvod s dvomi vstupmi, jeden privádza *poruchový signál*  $Z(s)$  a druhý privádza *riadiaci signál*  $W(s)$ . Schéma takéhoto regulačného obvodu je na (Obr. 57).

Veľmi dôležitou úlohou je určiť obrazový prenos regulačného obvodu pre prenos oboch vstupných veličín, teda pre prenos poruchy  $F_z(s)$  a tiež aj pre prenos riadiacej veličiny  $F_w(s)$ .



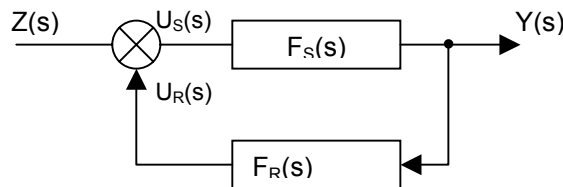


- RS – regulovaná sústava
- Z(s) – poruchová veličina
- Y(s) – regulovaná veličina
- W(s) – riadiaca veličina
- E(s) – regulačná odchýlka
- R – regulátor
- U<sub>R</sub>(s) – akčná veličina
- U<sub>S</sub>(s) – vstup do sústavy

Obr. 57 : Spätnoväzobný regulačný obvod s dvoma vstupmi

Pri určovaní prenosu poruchy predpokladáme, že riadiaca veličina  $W$  neovplyvňuje riadenie. Podobne pri určovaní prenosu riadenia predpokladáme, že porucha  $Z$  neovplyvňuje riadenie.

Blokovú schému uzavretého regulačného obvodu pre určenie *prenosu poruchy* prekreslíme podľa nasledujúceho, v ktorom  $F_R(s)$  znamená prenos regulátora  $F_S(s)$  prenos regulovanej sústavy.



$$Y(s) = F_S(s) U_S(s)$$

$$U_S(s) = Z(s) - U_R(s)$$

$$U_R(s) = F_R(s) Y(s)$$

Postupným dosadením do predchádzajúcich rovníc a po nasledujúcich úpravách :

$$U_S(s) = Z(s) - F_R(s) Y(s)$$

$$Y(s) = F_S(s) [Z(s) - F_R(s) Y(s)] = F_S(s) Z(s) - F_S(s) F_R(s) Y(s)$$

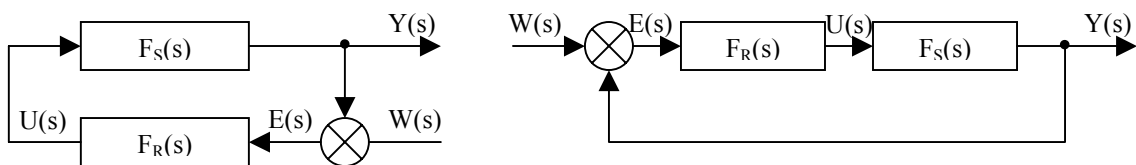
$$Y(s) + F_S(s) F_R(s) Y(s) = F_S(s) Z(s)$$

$$Y(s) = \frac{F_S(s)}{1 + F_S(s) F_R(s)} Z(s)$$

dostaneme výslednú rovnicu pre prenos poruchy :

$$F_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_S(s) F_R(s)} \quad (80)$$

Opäť pre určenie *prenosu riadenia*  $F_W(s)$  blokovú schému uzavretého regulačného obvodu prekreslíme do tvaru podľa niektorého z nasledujúcich dvoch ekvivalentných obrázkov :



Ak vyjdeme z obrázku a z definície obrazového prenosu, dostaneme rovnice :

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= F_S(s) F_R(s) E(s) \\
 E(s) &= W(s) - Y(s) \\
 Y(s) &= F_S(s) F_R(s) [W(s) - Y(s)] = F_S(s) F_R(s) W(s) - F_S(s) F_R(s) Y(s) \\
 Y(s) + F_S(s) F_R(s) Y(s) &= F_S(s) F_R(s) W(s) \\
 Y(s) &= \frac{F_S(s) F_R(s)}{1 + F_S(s) F_R(s)} W(s)
 \end{aligned}$$

Z ktorých pre obrazový prenos riadenia platí :

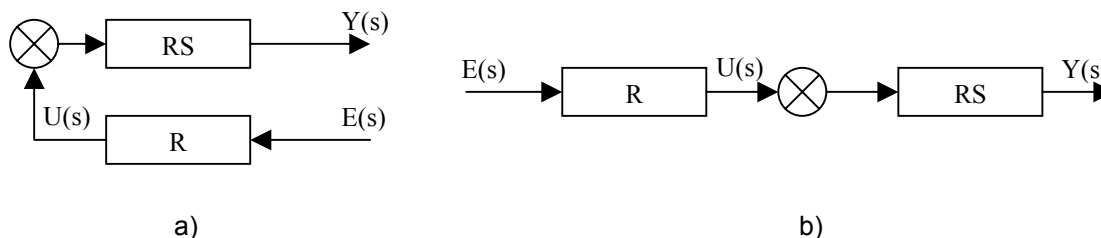
$$F_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_S(s) F_R(s)}{1 + F_S(s) F_R(s)} = \frac{F_S(s) F_R(s)}{1 + F_O(s)} \quad (81)$$

Súčin  $F_S(s)F_R(s)$  sa označuje ako *prenos otvoreného regulačného obvodu*  $F_O(s)$ .

Prenosy spätnoväzobných obvodov nazývame prenosmi uzavretých regulačných obvodov a označujeme ich indexami príslušnej vstupnej veličiny, napr.  $F_Z(s)$  a  $F_W(s)$ .

### 2.1.7.6 Otvorený regulačný obvod

Otvorený regulačný obvod vznikne rozpojením uzavretého regulačného obvodu. Obvykle sa rozpojuje obvod v mieste prenášanej regulovanej veličiny. Bloková schéma otvoreného regulačného obvodu je na Obr. 58 a) a prekreslená schéma na Obr. 58 b).



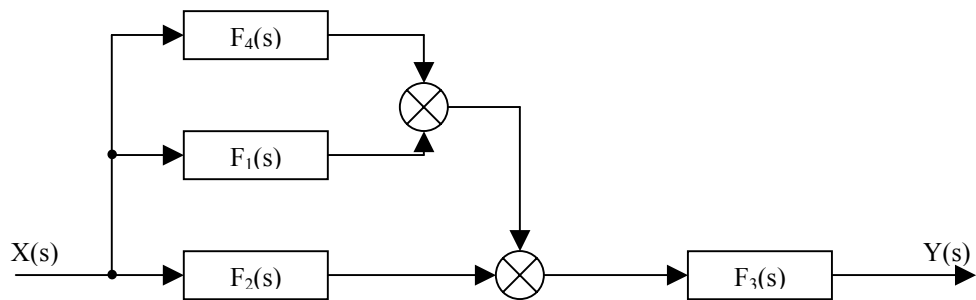
Obr. 58 : Otvorený regulačný obvod

Výsledný prenos otvoreného regulačného obvodu je rovný súčinu prenosov regulátora a sústavy. Regulátor ale pôsobí proti regulačnej odchýlke (je zapojený v zápornej spätnej väzbe), preto je vo výslednom prenose záporné znamienko.

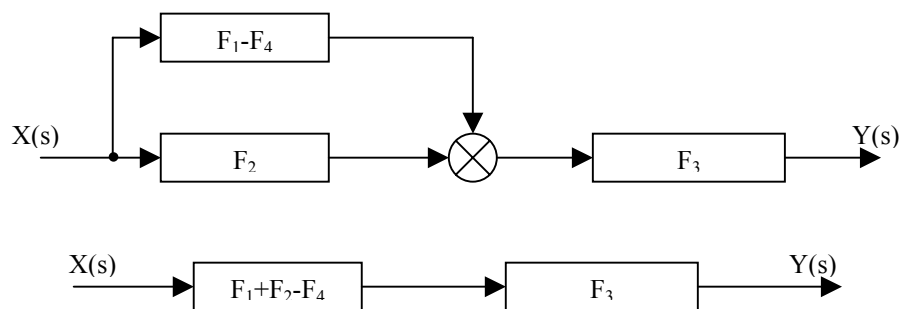
$$F_O(s) = -F_R(s)F_S(s) \quad (82)$$

**Poznámka:** V menovateli každého prenosu uzavretého regulačného obvodu je vždy charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu. Tento poznatok je pre nás veľmi užitočný, pretože môžeme priamo z prenosu písať charakteristickú rovnicu a diferenciálnu rovnicu uzavretého obvodu.

**Príklad 12 :** Je daný obvod podľa nasledujúceho obrázku. Úlohou je nájsť výsledný obrazový prenos daného zapojenia.



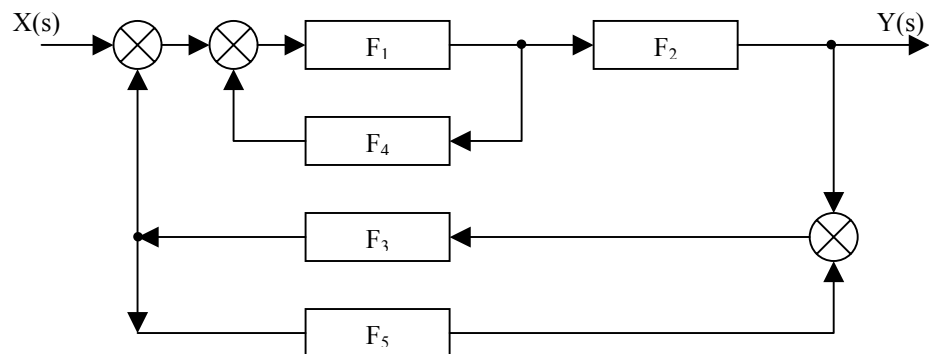
Riešenie : Použitím transformačných pravidiel sa postupne upraví zadaná schéma podľa obrázkov :



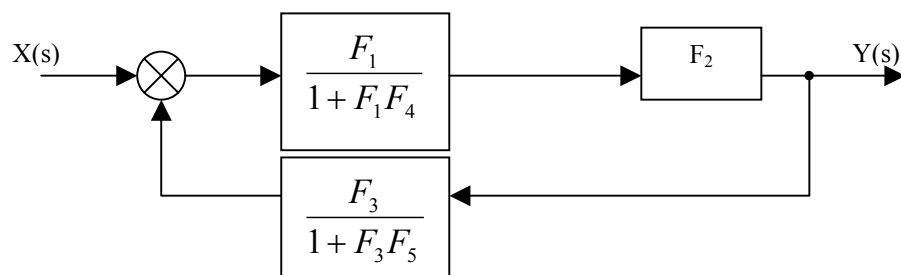
Takže výsledný prenos bude mať tvar :

$$F(s) = F_3(s)[F_1(s) + F_2(s) - F_4(s)]$$

**Príklad 13** : Je daný obvod podľa nasledujúceho obrázku. Úlohou je nájsť výsledný obrazový prenos daného zapojenia.



Riešenie: Zlúčením antiparalelne zaradených dvojíc prenosov  $F_1, F_4$  a  $F_3, F_5$  sa získa upravený obvod podľa obrázku :



Postupným zlúčením sériovo a antiparalelne radených dvojíc blokov sa získa výsledný prenos :

$$F(s) = \frac{\frac{F_1 F_2}{1 + F_1 F_4}}{1 + \frac{F_1 F_2 F_3}{(1 + F_1 F_4)(1 + F_3 F_5)}} = \frac{F_1 F_2}{1 + F_1 F_4 + \frac{F_1 F_2 F_3}{1 + F_3 F_5}}$$

## 2.2 Vnútny matematický popis spojitéch lineárnych sústav

Pod *vnútorným matematickým popisom* spojitéch lineárnych sústav rozumieme ich popis pomocou stavových rovníc. V tomto prípade teda skúmanie procesov ako dynamických systémov vychádza z teoretických bilančných stavových rovníc a z prirodzených stavových veličín. Stavové veličiny môžu byť vo všeobecnosti abstraktné. Ak je model procesu daný vo forme stavových rovníc, potom hovoríme o stavovej reprezentácii alebo aj o metóde stavového priestoru.

*Metóda stavového priestoru* dáva úplný obraz o všetkých dynamických vlastnostiach, to znamená i o tých, ktoré z hľadiska vzťahu vstup - výstup nie sú pozorovateľné. Moderné metódy založené na stavovom priestore pracujú v časovej oblasti. Oproti klasickým metódam umožňuje exaktne riešiť systémy s časovo premenlivými parametrami, s niekoľkými vstupmi a výstupmi, diskkrétne obvody a je rovnako dobre použiteľná ako pre lineárne tak aj pre nelineárne systémy.

### 2.2.1 Koncept stavu

Majme mnohorozmerný spojitý systém, ktorý má  $m$  vstupných a  $r$  výstupných veličín. Vzťahy medzi vstupnými a výstupnými veličinami môžeme vyjadriť pomocou nasledujúcich rovníc :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t)], \quad (83)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t)], \quad (84)$$

pričom  $\mathbf{x}(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  je vektor stavových veličín,  
 $\mathbf{u}(t)=[u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$  je vektor vstupných veličín,  
 $\mathbf{y}(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T$  je vektor výstupných veličín.

*Stav systému* je definovaný ako dostatočná informácia o systéme v nejakom okamihu  $t_0$ . Je to najmenší počet hodnôt platných v čase  $t_0$  a definovaných tak, aby pri známej budiacej funkcii bolo možné určiť stav systému pre akékoľvek  $t > t_0$ . To znamená, že stav systému pre čas  $t > t_0$  nie je závislý na stave pred časom  $t_0$ . Množinu hodnôt definujúcich stav systému nazveme množinou stavových premenných.

*Stavové premenné* majú geometrický význam súradníc stavového priestoru, v ktorom riešime chovanie systému. Stav systému reprezentuje poloha zastupujúceho bodu, ktorého spojnicu s počiatkom nazveme *stavovým vektorom*. Zastupujúci bod pri akejkoľvek zmene v systéme opisuje takzvanú *stavovú trajektóriu*, ktorá je teda totožná s pohybom stavového vektora počas danej zmeny. Najmenší počet stavových premenných, nutných pre opis stavu systému, je rovný rádu výslednej diferenciálnej rovnice popisujúcej systém.

Teda známy vektor  $\mathbf{x}(t_0)$  a známy vektor vstupných veličín  $\mathbf{u}(t)$  pre čas  $t > t_0$  jednoznačne určuje vektor výstupných veličín  $\mathbf{y}(t)$  pre čas  $t > t_0$ , čiže platí

$$\mathbf{y}(t_0, t) = \mathbf{y}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)], \quad (85)$$

$\mathbf{u}(t_0, t)$  vyjadruje vektor vstupných veličín a  $\mathbf{y}(t_0, t)$  vyjadruje vektor výstupných veličín na polouzavretom intervale  $(t_0, t)$ . Tiež platí

$$\mathbf{x}(t_0, t) = \mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)], \quad (86)$$

$\mathbf{x}(t_0, t)$  vyjadruje vektor stavových veličín na polouzavretom intervale  $(t_0, t)$ .

Stav systému sme definovali ako dostatočnú informáciu o systéme v nejakom okamihu  $t_0$ . Ak je daný vektor vstupných veličín  $\mathbf{u}(t)$  pre  $t > t_0$  a táto informácia, potom je možné určiť vektor výstupných veličín  $\mathbf{y}(t)$  pre čas  $t > t_0$ . Znalosť stavu v čase  $t_0$  odstraňuje potrebu informácií o minulom správaní sa systému na určenie jeho budúcnosti.

Budúce stavové správanie sa systému závisí tiež len na súčasnom stave a na budúcim vstupe. Vyjadrené presnejšie to znamená, že známy stavový vektor  $\mathbf{x}(t)$  v čase  $t_0$  a známy vektor vstupných veličín  $\mathbf{u}(t)$  pre čas  $t > t_0$  jednoznačne určuje vektor stavových veličín  $\mathbf{x}(t)$  pre čas  $t > t_0$ .

Uvedená definícia stavu systému sa stane jasnejšia, ak uvedieme riešenie stavových rovníc pre všeobecné priebehy vstupných veličín.

## 2.2.2 Analytické riešenie stavových rovníc

Riešenie urobíme len pre lineárne systémy s konštantnými koeficientmi a pri riešení využijeme znalosti z Laplaceovej transformácie. Najskôr urobíme riešenie pre jednoduchý skalárny príklad a potom riešenie zovšeobecníme.

**Príklad 14** : Majme proces miešania, ktorý je zjednodušene zobrazený na Obr. 59, a ktorého matematický model má nasledujúci tvar :

$$V \frac{dc_1}{dt} = q c_0 - q c_1 ,$$

kde  $c_0$  a  $c_1$  sú koncentrácie s rozmerom hmotnosť/objem,  $V$  je konštantný objem nádrže v zásobníku a  $q$  je konštantný objemový prietok. V ustálenom stave platí :

$$q c_0^s - q c_1^s = 0 .$$

Zavedenie odchýlkovej stavovej veličiny  $x$ , odchýlkovej vstupnej veličiny  $u$  a definovanie výstupnej veličiny  $y$  :

$$x = c_1 - c_1^s ,$$

$$u = c_0 - c_0^s ,$$

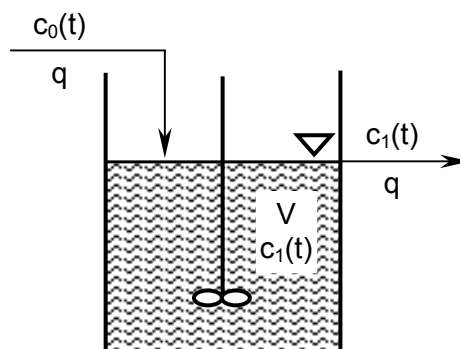
$$y = x ,$$

dáva stavové rovnice procesu miešania v tvare :

$$\frac{dx}{dt} = a x + b u ,$$

$$y = c x ,$$

pričom  $a = -1/T_1$ ,  $b = 1/T_1$ ,  $c = 1$ .  $T_1 = V / q$  je časová konštanta skúmaného procesu miešania.



Obr. 59 : Proces miešania

Predpokladajme, že systém je v čase  $t_0 = 0$  v stave :

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 .$$

Na riešenie rovnice dynamiky môžeme použiť Laplaceovu transformáciu. Platí :

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \mathbf{X}(s) + \mathbf{b} U(s) ,$$

$$\mathbf{X}(s) = \frac{1}{s - \mathbf{a}} \mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{b}}{s - \mathbf{a}} U(s) .$$

Originál prvého člena na pravej strane poslednej rovnice sa dá nájsť priamo v slovníku Laplaceovej transformácie. Originál druhého člena na pravej strane poslednej rovnice sa získa na základe znalosti obrazu konvolučného súčinu. Potom pre  $x(t)$  platí :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{a}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{a}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau ,$$

a  $y(t)$  bude :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c} e^{\mathbf{a}t} \mathbf{x}(0) + \mathbf{c} \int_0^t e^{\mathbf{a}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau .$$

Po dosadení  $\mathbf{a} = -1/T_1$ ,  $\mathbf{b} = 1/T_1$ ,  $\mathbf{c} = 1$ ,  $T_1 = V/q$ , bude  $y(t)$  :

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\frac{q}{V}t} \mathbf{x}(0) + \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{q}{V}(t-\tau)} u(\tau) d\tau .$$

### 2.2.3 Riešenie stavových rovníc pre mnohorozmerný prípad

Riešenie stavových rovníc pre mnohorozmerný prípad je možné robiť pomocou Laplaceovej transformácie tak, že každá skalárna rovnica dynamiky a výstupu sa transformuje, a potom po úprave sa hľadá originál. Ak máme viac ako dve rovnice dynamiky, riešenie sa stáva neprehľadným. Situácia sa sprehľadní, ak využijeme vektorovo maticový zápis stavových rovníc. Formálne bude postup pri riešení zhodný s postupom v príklade 14.

Majme stavové rovnice :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \quad (87)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) . \quad (88)$$

Rovnica (87) po Laplaceovej transformácii bude :

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) , \quad (89)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) . \quad (90)$$

Originál  $\mathbf{x}(t)$  bude :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau , \quad (91)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau , \quad (92)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} . \quad (93)$$

Z riešenia stavových rovníc v tvare (92) vyplýva niekoľko veľmi dôležitých skutočností. Riešenie sa skladá z dvoch častí. Z rovnice (92) vyplýva, že riešenie  $\mathbf{y}(t)$  je určené začiatočnými podmienkami

a priebehom vstupu  $u(t)$ . Vplyv začiatočných podmienok na riešenie je vyjadrený prvým členom na pravej strane rovnice (92) a vplyv vstupu je vyjadrený druhým členom na pravej strane rovnice (92).

Riešenie rovnice (87) pre prípad voľného systému, teda pre prípad ak  $u = 0$ , je :

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0), \quad (94)$$

kde exponenciálna matica  $e^{At}$  je definovaná nekonečným radom :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^i}{i!}. \quad (95)$$

Matica

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1} \{ (sI - \mathbf{A})^{-1} \}, \quad (96)$$

sa nazýva fundamentálna matica systému. Ak začiatočné podmienky rovnice (87) sú určené vektorom  $\mathbf{x}(t_0)$ , potom riešenie rovnice (87) pre prípad voľného systému je :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0), \quad (97)$$

pričom  $\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$ .

Z rovnice (96) je zrejme, že rozhodujúcu úlohu pri riešení stavových rovníc má matica systému  $\mathbf{A}$ . Prvky matice  $\mathbf{A}$  sú určené koeficientmi prestupu tepla, prestupu látky, aktivačnými energiami, objemami, prietokmi atď. Riešenie stavových rovníc je teda ovplyvnené fyzikálno-chemickými vlastnosťami procesu.

Pre riešenie stavových rovníc majú dôležitú úlohu korene charakteristickej rovnice :

$$\det(sI - \mathbf{A}) = 0. \quad (98)$$

Prečo je tomu tak, to uvidíme z nasledujúceho príkladu.

**Príklad 15 :** Výpočet fundamentálnej matice pre danú maticu systému. Majme danú maticu :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentálna matica  $\Phi(t)$  pre túto maticu  $\mathbf{A}$  podľa rovnice (96) je :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= L^{-1} \left\{ \left[ s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\}, \\ &= L^{-1} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\}, \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{\det \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \right\}, \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \right\}, \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Prvky matice  $\Phi(t)$  nájdeme jednoducho pomocou slovníka Laplaceovej transformácie (Tab. 4) :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Pre fundamentálnu maticu môžeme písať :

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0 - t_0) \mathbf{x}(t_0) \Rightarrow \Phi(0) = I, \quad (99)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1) \mathbf{x}(t_1), \quad (100)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (101)$$

## 2.2.4 Numerické riešenie stavových rovníc

Analytické metódy riešenia je možné použiť v prípadoch, keď modely procesov sú lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi. Ak sú modely procesov a systémov nelineárne diferenciálne rovnice, potom nájsť analytické riešenie je obyčajne ťažké, alebo nemožné. V takýchto prípadoch je nutné využiť metódy numerického riešenia. V týchto metódach sú modely v tvare diferenciálnych rovníc transformované do tvaru diferenčných rovníc, ktoré môžu byť riešené iteračným spôsobom na počítači. Nedostatok tohto typu riešenia je čiastočná strata všeobecnosti, pretože dopredu musia byť určené numerické hodnoty začiatočných podmienok a parametrov, ako aj vstupov modelov. Vo väčšine prípadov však neexistuje iná alternatíva, ako numerické riešenie diferenciálnych rovníc. Použitie numerickej metódy na určenie odozvy systému sa nazýva simulácia. Na numerické riešenie diferenciálnych rovníc existuje mnoho metód. V nasledujúcej časti uvedieme Eulerovu metódu a metódu Runge-Kutta. Podstatu problému numerického riešenia diferenciálnych rovníc vysvetlíme na prípade Eulerovej metódy. Najčastejšie používanou metódou je metóda Runge-Kutta.

### 2.2.4.1 Eulerova metóda

Majme model procesu v tvare :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (102)$$

Úlohou je túto rovnicu numericky riešiť, Podstatou numerickej metódy je transformácia diferenciálnej rovnice na ekvivalentnú diferenčnú rovnicu. Z definície derivácie funkcie :

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (103)$$

vyplýva, že ak volíme  $\Delta t$  dostatočne malé, potom deriváciu môžeme približne písať :

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (104)$$

Predpokladajme, že pravá strana rovnice (102) je konštantná na intervale  $(t, t + \Delta t)$  a nahradíme deriváciu v rovnici (102) podľa rovnice (104). Potom môžeme písať :

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(t, x(t)) \quad (105)$$

resp.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(t, x(t)). \quad (106)$$

Oba predpoklady vedúce k rovnici (106) sú oprávnené len pri dostatočne malom  $\Delta t$ .



Rovnica (106) pre čas  $t_0$  bude :

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t f(t_0, x(t_0)). \quad (107)$$

Pre čas  $t_1 = t_0 + \Delta t$  môžeme písať :

$$x(t_1 + \Delta t) = x(t_1) + \Delta t f(t_1, x(t_1)). \quad (108)$$

Vo všeobecnosti bude rovnica (106) pre čas  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  mať tvar :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t f(t_k, x(t_k)). \quad (109)$$

Majme teraz diferenciálnu rovnicu v tvare :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (110)$$

Predpokladajme, že pravá strana rovnice (110) je konštantná na intervale  $(t_k, t_{k+1})$  a je rovná  $f(t_k, x(t_k), u(t_k))$ . S aproximáciou (104) platí :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t f(t_k, x(t_k), u(t_k)). \quad (111)$$

V rovnici (111) vidíme, že časovo spojité veličiny  $x(t)$ ,  $u(t)$  boli nahradené časovo diskretnými veličinami  $x(t_k)$ ,  $u(t_k)$ . S označením :

$$x(t_k) \cong x_k, \quad (112)$$

$$u(t_k) \cong u_k, \quad (113)$$

dostaneme rekurzívny vzťah resp. diferenčnú rovnicu :

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f(t_k, x_k, u_k), \quad (114)$$

ktorá môže byť riešená rekurzívne, resp. sekvenčne pre  $k = 0, 1, 2, \dots$ , začínajúc so začiatočnou hodnotou  $x_0$ .

Rovnica (114) predstavuje Eulerovu metódu riešenia rovnice (110) a je ľahko programovateľná na počítači. Rozdiel dvoch po sebe nasledujúcich argumentov  $(t_{k+1} - t_k)$  môže byť konštanta  $h > 0$ , ktorá sa nazýva integračný krok.

Požiadavka vyššej presnosti viedla k modifikácii Eulerovej metódy. Pri modifikovanej Eulerovej metóde, ak je určené  $x(t_k)$ , potom  $x(t_{k+1})$  sa počíta podľa nasledovnej rovnice :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}), \quad (115)$$

pričom platí :

$$t_k = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f_k = f(t_k, x(t_k), u(t_k)),$$

$$f_{k+1} = f[t_{k+1}, x(t_k) + h f(t_k, x(t_k), u(t_k)), u(t_{k+1})].$$

#### 2.2.4.2 Metóda Runge-Kutta

Metóda Runge-Kutta je založená na rozvoji funkcie do Taylorovho radu. Taylorov rad môže byť použitý na vyjadrenie riešenia diferenciálnej rovnice  $x(t+\Delta t)$  v závislosti od  $x(t)$  a jej derivácií nasledovne :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{x}(t) + \dots \quad (116)$$

Ak diferenciálna rovnica, ktorú chceme riešiť, má tvar :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad (117)$$

potom :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ \ddot{x}(t) &= \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (118)$$

Dosadením (118) do (116) dostaneme :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 (f_t + f_x f) + \dots, \quad (119)$$

pričom  $f \cong f(t, x(t))$ ,  $f_t \cong \partial f / \partial t$ ,  $f_x \cong \partial f / \partial x$ .

Riešenie  $x(t+\Delta t)$  v rovnici (119) je závislé na znalosti derivácií funkcie  $f$ . Vyššie derivácie funkcie  $f$  sa ťažko určujú, a preto pri aplikácii vzťahu (119) sa pri riešení diferenciálnej rovnice uvažuje len niekoľko členov na pravej strane rovnice (119). Jedná sa o aproximáciu Taylorovho radu, čo je podstatou metódy Runge-Kutta. Počet členov v rade určuje rád metódy Runge-Kutta.

S uvažovaním integračného kroku  $h$  bude platiť :

$$t_{k+1} = t_k + h. \quad (120)$$

Metóda Runge-Kutta druhého rádu je založená na aplikácii diferenciálnej rovnice :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + h \dot{x}(t_k) + \frac{1}{2} h^2 \ddot{x}(t_k), \quad (121)$$

resp.

$$x_{k+1} = x_k + h f_k + \frac{1}{2} h^2 (f_t + f_x f)_k. \quad (122)$$

Rekurzívny vzťah vhodný na riešenie diferenciálnych rovníc vyplývajúci z metódy Runge-Kutta druhého rádu je :

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2, \quad (123)$$

kde  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  sú váhové konštanty a :

$$k_1 = h f(t_k, x_k), \quad (124)$$

$$k_2 = h f(t_k + \alpha_1 h, x_k + \beta_1 k_1), \quad (125)$$

pričom  $\alpha_1$  a  $\beta_1$  sú konštanty. Konštatovanie, že vzťah (123) je rekurzívny vzťah vyplývajúci z metódy Runge-Kutta druhého rádu, sa dá ukázať nasledovne. Najskôr rozvineme  $f$  v  $k_2$  do Taylorovho radu a dostaneme :

$$k_2 = h [f_k + (f_t)_k \alpha_1 h + (f_x)_k \beta_1 h f_k + \dots], \quad (126)$$

a potom zanedbáme všetky členy radu, ktoré sme explicitne neuviedli. Po dosadení  $k_1$  z rovnice (124) a  $k_2$  z rovnice (126) do rovnice (123) táto bude :

$$x_{k+1} = x_k + h (\gamma_1 f_k + \gamma_2 f_k) + h^2 [\gamma_2 \alpha_1 (f_t)_k + \gamma_2 \beta_1 (f_x)_k f_k]. \quad (127)$$

Z porovnania rovníc (121) a (127) vyplýva, že :

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad (128)$$

$$\gamma_2 \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad (129)$$

$$\gamma_2 \beta_1 = \frac{1}{2}. \quad (130)$$

Tým sme ukázali, že vzťah (123) je rekurzívnym vzťahom, ktorý vyplýva z metódy Runge-Kutta druhého rádu.

Najznámejší rekurzívny vzťah vhodný na riešenie diferenciálnych rovníc vyplývajúci z metódy Runge-Kutta štvrtého rádu je :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{1}{6} \mathbf{k}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{k}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{k}_3 + \frac{1}{6} \mathbf{k}_4, \quad (131)$$

pričom :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k), \\ \mathbf{k}_2 &= h \mathbf{f}\left(t_k + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= h \mathbf{f}\left(t_k + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= h \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{x}_k + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (132)$$

### 2.2.4.3 Metóda Runge-Kutta pre sústavu diferenciálnych rovníc

Metódu Runge-Kutta je možné použiť na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (133)$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

Na tomto mieste uvedieme len ekvivalenty vzťahov (121), (123)-(125), teda vzťahov predstavujúcich metódu Runge-Kutta druhého rádu. Na základe Taylorovho rozvoja môžeme zapísať :

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + h \dot{\mathbf{x}}(t_k) + \frac{1}{2} h^2 \ddot{\mathbf{x}}(t_k). \quad (134)$$

Rekurzívny vzťah vhodný na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc vyplývajúci z metódy Runge-Kutta druhého rádu je :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \gamma_1 \mathbf{k}_1 + \gamma_2 \mathbf{k}_2, \quad (135)$$

pričom :

$$\mathbf{k}_1 = h \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k), \quad (136)$$

$$\mathbf{k}_2 = h \mathbf{f}(t_k + \alpha_1 h, \mathbf{x}_k + \beta_1 \mathbf{k}_1). \quad (137)$$

### 2.2.5 Kanonická transformácia

Vlastné hodnoty matice  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sú dané riešením rovnice :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (138)$$

Ak sú vlastné hodnoty matice  $\mathbf{A}$  navzájom rôzne, potom existuje nesingulárna matica  $\mathbf{T}$  taká, že :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad (139)$$

je diagonálna matica tvaru :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (140)$$

Kanonickú transformáciu (139) môžeme využiť na priamy výpočet  $e^{-\mathbf{A}t}$ . Po dosadení  $\mathbf{A}$  určeného z rovnice (139) do rovnice :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{I}, \quad (141)$$

môžeme písať :

$$\frac{d(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x})}{dt} = \Lambda \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}, \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{T}^{-1}. \quad (142)$$

Riešením tejto rovnice je :

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} = e^{-\Lambda t} \mathbf{T}^{-1}, \quad (143)$$

alebo :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} e^{-\Lambda t} \mathbf{T}^{-1}. \quad (144)$$

Z toho vyplýva, že fundamentálna rovnica má tvar :

$$\Phi(t) = \mathbf{T} e^{-\Lambda t} \mathbf{T}^{-1}, \quad (145)$$

pričom :

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (146)$$

## 2.2.6 Riaditeľnosť a pozorovateľnosť spojitého systému

Riaditeľnosť a pozorovateľnosť patria medzi základné vlastnosti systémov súvisiace so stavovým modelom. Podobne aj stabilita, o ktorej bude pojednané v kapitole 2.4.3. Všetky tieto vlastnosti môžu byť využité pri analýze a syntéze systémov.

### 2.2.6.1 Riaditeľnosť spojitého systému

Koncept riaditeľnosti systémov popri koncepte pozorovateľnosti systémov je fundamentálnym v teórii automatického riadenia.

*Definícia riaditeľnosti pre uvažovaný lineárny systém :*

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad (147)$$

zníe nasledovne: Stav  $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$  systému (147) je riaditeľný, ak systém môžeme dostať z tohto stavu do stavu  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$  pôsobením vhodného  $\mathbf{u}(t)$  za konečný čas  $t_1 - t_0$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ .

Ak je každý stav  $\mathbf{x}(t_0)$  riaditeľný, potom je systém úplne riaditeľný.

*Definícia dosiahnuteľnosti pre lineárny systém :* Stav  $\mathbf{x}(t_1)$  systému (147) je dosiahnuteľný, ak systém môžeme dostať zo stavu  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  do stavu  $\mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{0}$  pôsobením vhodného  $\mathbf{u}(t)$  za konečný čas  $t_1 - t_0$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ .

Ak je každý stav  $\mathbf{x}(t_1)$  dosiahnuteľný, potom je systém úplne dosiahnuteľný.

Pre lineárny systém s konštantnými koeficientmi (lineárny časovo invariantný systém) platí, že každý dosiahnuteľný stav je tiež riaditeľný, takže pre lineárne spojité systémy s konštantnými koeficientmi stačí hovoriť o riaditeľnosti, pretože nie je treba riaditeľnosť a dosiahnuteľnosť rozlišovať.

Často sa jednoducho hovorí, že lineárny spojité systém s konštantnými koeficientmi je úplne riaditeľný (krátka : riaditeľný), ak existuje také  $\mathbf{u}(t)$ , ktorého pôsobením sa systém dostane z ľubovoľného začiatkového stavu  $\mathbf{x}(t_0)$  do ľubovoľného koncového stavu  $\mathbf{x}(t_1)$  za konečný čas  $t_1 - t_0$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ .

*Veta o úplnej riaditeľnosti lineárnych spojitého systémov s konštantnými koeficientmi :* Systém

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (148)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (149)$$

je úplne riaditeľný vtedy a len vtedy, ak hodnosť matice riaditeľnosti  $\mathbf{Q}_R$  je  $n$ . Matica riaditeľnosti :

$$\mathbf{Q}_R = (\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}), \quad (150)$$

má rozmer  $n \times nm$ ,  $n$  je rozmer vektora  $\mathbf{x}$  a  $m$  je rozmer vektora  $\mathbf{u}$ .

*Dôkaz* : Uvedieme stručne dôkaz časti vety „nevyhnutnosť“. Riešenie rovnice (148) so začiatočnou podmienkou  $\mathbf{x}(t_0)$  je :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (151)$$

Pre  $t = t_1$  platí :

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t_1} \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (152)$$

Funkciu  $e^{-\mathbf{A}\tau}$  s využitím Cayley-Hamiltonovej vety môžeme písať v tvare :

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = k_0(\tau) \mathbf{I} + k_1(\tau) \mathbf{A} + k_2(\tau) \mathbf{A}^2 + \dots + k_{n-1}(\tau) \mathbf{A}^{n-1}. \quad (153)$$

Dosadením  $e^{-\mathbf{A}\tau}$  z (153) do (152) dostaneme :

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t_1} \int_0^{t_1} (k_0(\tau) \mathbf{B} + k_1(\tau) \mathbf{AB} + k_2(\tau) \mathbf{A}^2 \mathbf{B} + \dots + k_{n-1}(\tau) \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (154)$$

resp. :

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t_1} \int_0^{t_1} (\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \times \begin{pmatrix} k_0(\tau) \mathbf{u}(\tau) \\ k_1(\tau) \mathbf{u}(\tau) \\ k_2(\tau) \mathbf{u}(\tau) \\ \vdots \\ k_{n-1}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \end{pmatrix} d\tau. \quad (155)$$

Úplna riaditeľnosť znamená, že pre každé  $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$  existuje konečný čas  $t_1 - t_0$  a vhodné  $\mathbf{u}(t)$  také, že platí :

$$-\mathbf{x}(t_0) = (\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} k_0(\tau) \mathbf{u}(\tau) \\ k_1(\tau) \mathbf{u}(\tau) \\ k_2(\tau) \mathbf{u}(\tau) \\ \vdots \\ k_{n-1}(\tau) \mathbf{u}(\tau) \end{pmatrix} d\tau. \quad (156)$$

Z tejto rovnice vyplýva, že každý vektor  $-\mathbf{x}(t_0)$  môže byť vyjadrený ako nejaká lineárna kombinácia stĺpcov matice riaditeľnosti  $\mathbf{Q}_R$ . Tieto stĺpce musia obsahovať  $n$ -rozmerný stavový priestor. To znamená, že aby bol systém úplne riaditeľný, je nevyhnutné, aby matica riaditeľnosti  $\mathbf{Q}_R$  mala hodnosť  $n$ .

Veta o úplnej riaditeľnosti systému umožňuje jednoducho testovať riaditeľnosť systému vzhľadom na  $\mathbf{x}$ . Podobne môžeme dospieť k testu riaditeľnosti vzhľadom na  $\mathbf{y}$ .

*Veta o úplnej riaditeľnosti výstupu lineárnych spojitých systémov s konštantnými koeficientmi* : Výstup  $\mathbf{y}$  systému (148), (149) je úplne riaditeľný vtedy a len vtedy, ak matica riaditeľnosti  $\mathbf{Q}_R^V [r \times nm]$  bude mať hodnosť  $r$  (kde  $r$  je počet výstupov), pričom :

$$\mathbf{Q}_R^V = (\mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}). \quad (157)$$

Poznamenávame, že podmienky riaditeľnosti sú odvodené aj pre lineárne systémy s premennými koeficientmi pre prípad, keď  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  sú známe funkcie času.

Ďalej poznamenávame, že podmienky riaditeľnosti nelineárnych systémov sú odvodené pre veľmi málo špeciálnych prípadov. Našťastie vo väčšine prípadov riaditeľnosť nelineárneho systému je zaručená, ak je riaditeľný linearizovaný systém.

**Príklad 16 :** Urobte analýzu riaditeľnosti pre prietokový chemický reaktor s miešaním. Linearizovaný stavový model prietokového chemického reaktora má tvar :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_{21} u_1(t).\end{aligned}$$

Tieto rovnice môžeme prepísať do tvaru :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u_1(t),$$

pričom :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Matica riaditeľnosti  $\mathbf{Q}_R$  bude :

$$\mathbf{Q}_R = (\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0_{11} & a_{12} b_{21} \\ b_{21} & a_{22} b_{21} \end{pmatrix}$$

a má hodnotu dva, takže systém je úplne riaditeľný. Je zrejmé, že toto platí pre všetky ustálené stavy. Teda môžeme povedať, že zodpovedajúci nelineárny systém je riaditeľný.

### 2.2.6.2 Pozorovateľnosť spojitých systémov

Vo väčšine prípadov je stav systému merateľný len čiastočne alebo nie je vôbec merateľný. Z tohto dôvodu nie je možné realizovať riadenie, ktoré vychádza zo znalosti stavových veličín. V tejto súvislosti vzniká otázka, či je možné z merateľného výstupu určiť stavový vektor. Rozlišuje sa pozorovateľný a rekonštruovateľný stav.

*Definícia pozorovateľného stavu :* Stav systému  $\mathbf{x}(t_0)$  je pozorovateľný, ak ho môžeme určiť na základe znalosti  $\mathbf{y}(t)$  na konečnom intervale  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ . Ak je možné určiť každý stav systému  $\mathbf{x}(t_0)$  na základe znalosti vektora výstupných veličín  $\mathbf{y}(t)$  v ľubovoľnom intervale  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ , potom je systém úplne pozorovateľný.

*Definícia rekonštruovateľného stavu :* Stav systému  $\mathbf{x}(t_0)$  je rekonštruovateľný, ak ho môžeme určiť na základe znalosti  $\mathbf{y}(t)$  na konečnom intervale  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ . Ak je možné určiť každý stav systému  $\mathbf{x}(t_0)$  zo znalosti vektora výstupných veličín  $\mathbf{y}(t)$  v ľubovoľnom intervale  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ , potom je systém úplne rekonštruovateľný.

Podobne ako v prípade riaditeľnosti a dosiahnuteľnosti sa za účelom zosúhrnenia používajú pojmy pozorovateľnosť, resp. rekonštruovateľnosť systému. Pre lineárne systémy s konštantnými koeficientmi platí, že ak je systém úplne pozorovateľný, potom je aj úplne rekonštruovateľný. Na posúdenie pozorovateľnosti stačí skúmať voľný systém.

*Veta o úplnej pozorovateľnosti lineárnych spojitých systémov s konštantnými koeficientmi :*

Systém :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad (158)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad (159)$$

je úplne pozorovateľný vtedy a len vtedy, ak matica pozorovateľnosti :

$$\mathbf{Q}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (160)$$

ktorá má rozmer  $nr \times n$ , má hodnotu  $n$ .

*Dôkaz* : Uvedieme stručne dôkaz časti vety „nevyhnutnosť“. Riešenie rovnice (158) je :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{A t} \mathbf{x}(t_0). \quad (161)$$

Funciu  $\mathbf{e}^{-A \tau}$  s využitím Cayley-Hamiltonovej vety môžeme písať v tvare :

$$\mathbf{e}^{-A \tau} = k_0(\tau) \mathbf{I} + k_1(\tau) \mathbf{A} + k_2(\tau) \mathbf{A}^2 + \dots + k_{n-1}(\tau) \mathbf{A}^{n-1}. \quad (162)$$

Dosadením  $\mathbf{e}^{-A \tau}$  z (162) do (161) dostaneme :

$$\mathbf{x}(t) = \left[ k_0(t) \mathbf{I} + k_1(t) \mathbf{A} + k_2(t) \mathbf{A}^2 + \dots + k_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1} \right] \mathbf{x}(t_0). \quad (163)$$

Rovnica (159) teraz bude :

$$\mathbf{y}(t) = \left[ k_0(t) \mathbf{C} + k_1(t) \mathbf{C} \mathbf{A} + k_2(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^2 + \dots + k_{n-1}(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \right] \mathbf{x}(t_0), \quad (164)$$

alebo :

$$\mathbf{x}(t_0) = \left[ \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P)^T (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P) dt \right]^{-1} \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P)^T \mathbf{y}(t) dt, \quad (165)$$

pričom  $\mathbf{k}^T(t) = [k_0(t), k_1(t), \dots, k_{n-1}(t)]$ .

Pre systém, ktorý je pozorovateľný, musí byť možné určiť  $\mathbf{x}(t_0)$  z rovnice (165). Musí teda existovať inverzia výrazu :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P)^T (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P) dt.$$

Aby táto inverzia existovala, je treba, aby  $n \times n$  matica :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P)^T (\mathbf{k}^T(t) \mathbf{Q}_P) dt = \mathbf{Q}_P^T \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{k}(t) \mathbf{k}^T(t) dt \mathbf{Q}_P, \quad (166)$$

bola nesingulárna. Dá sa ukázať, že matica  $\mathbf{k}^T(t) \mathbf{k}(t)$  je nesingulárna, t.j. má hodnotu  $n$  vtedy a len vtedy, ak  $nr \times n$  matica  $\mathbf{Q}_P$  má hodnotu  $n$ .

Poznamenávame, že podmienky pozorovateľnosti a rekonštruovateľnosti pre spojité lineárne systémy s konštantnými koeficientmi sú zhodné.

**Príklad 17** : Úlohou je urobiť analýzu pozorovateľnosti pre prietokový chemický reaktor s miešaním. Majme prietokový chemický reaktor s miešaním. Predpokladajme, že model reaktora je :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t),$$

$$y_1(t) = x_2(t).$$

Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{C}$  sú :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (0, 1).$$

Matica riaditeľnosti  $\mathbf{Q}_P$  je :

$$\mathbf{Q}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a má hodnotu dva, teda systém je pozorovateľný.

## 2.2.7 Kanonický rozklad

Pre spojitý lineárny systém s konštantnými koeficientmi je možné vždy nájsť stavovú transformáciu tak, že systém sa po tejto transformácii dá rozložiť na štyri dielčie systémy :

- (A) riaditeľný a pozorovateľný dielčí systém,
- (B) riaditeľný a nepozorovateľný dielčí systém,
- (C) neriaditeľný a pozorovateľný dielčí systém,
- (D) neriaditeľný a nepozorovateľný dielčí systém.

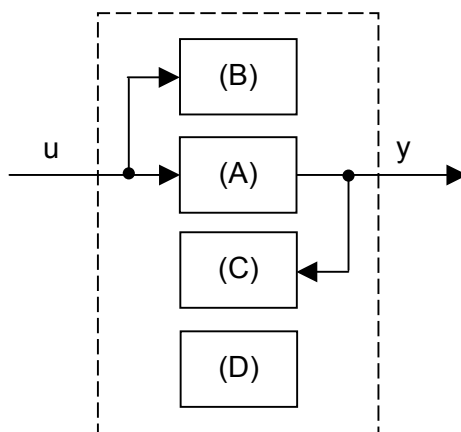
Toto rozdelenie sa nazýva *kanonický rozklad*. Účelovo môžeme kanonický rozklad znázorniť tak, ako je to na Obr. 60. Zo znázornenia kanonického rozkladu je zrejmé, že dielčí systém (A) je možné opísať spôsobom, ktorý je založený na znalosti vstupu a výstupu systému.

Vlastné hodnoty zodpovedajúce rozčlenenej matici systému môžu byť rozdelené, korešpondujúco s kanonickým rozkladom do štyroch skupín :

- (A) riaditeľné a pozorovateľné módy,
- (B) riaditeľné a nepozorovateľné módy,
- (C) neriaditeľné a pozorovateľné módy,
- (D) neriaditeľné a nepozorovateľné módy.

Stavový model lineárneho spojitého systému s konštantnými koeficientmi je minimálny, ak je riaditeľný a pozorovateľný. Stavový model procesu je všeobecnejší ako vstupno – výstupný model, pretože môže obsahovať aj neriaditeľné a nepozorovateľné časti, ak v reálnom procese existujú. Vstupno – výstupný model procesu zahrňuje len riaditeľnú a pozorovateľnú časť modelu. Pri syntéze riadenia sa vyžaduje riaditeľnosť a pozorovateľnosť systému.

Niekedy sa pri analýze systémov namiesto riaditeľnosti skúma *stabilizovateľnosť*. Systém je *stabilizovateľný*, ak všetky nestabilné módy systému sú riaditeľné. Podobne sa niekedy pri analýze systémov namiesto pozorovateľnosti skúma *detekovateľnosť*. Systém je *detekovateľný*, ak všetky jeho nepozorovateľné módy sú asymptoticky stabilné.



Obr. 60 : Kanonický rozklad



## 2.3 Vyšetrovanie dynamických vlastností sústav a ich prvkov

Zmena vonkajších podmienok (pôsobenia), v ktorých sa daná sústava (regulačný obvod) nachádza, spôsobuje jej prechod z jedného rovnovážneho stavu (ustáleného stavu), keď sa jednotlivé veličiny v čase už nemenia, do druhého rovnovážneho stavu. Nastáva prechodový dej, ktorý sa v regulačnej technike nazýva *regulačným pochodom* a býva popísaný diferenciálnou rovnicou, v lineárnych systémoch lineárnou diferenciálnou rovnicou.

Pre lineárne systémy platí princíp superpozície. Tento princíp umožňuje i pre zložité sústavy zložené z rôznych členov zvoliť určité základné signály a k nim určiť odpovedajúce priebehy výstupných signálov, tzv. odozvy.

### 2.3.1 Regulárne signály používané k zisťovaniu dynamických vlastností

V regulačnej technike sa používajú štyri základné vstupné signály :

- jednotková skoková funkcia (Heavisideova funkcia),
- jednotková impulzná funkcia (Diracova funkcia),
- harmonický signál,
- náhodný signál, biely šum, má pre všetky frekvencie rovnakú hodnotu spektrálnej výkonovej hustoty.

#### 2.3.1.1 Jednotková skoková funkcia

*Jednotková skoková funkcia* (Heavisideova funkcia), označovaná  $1(t)$ ,  $H(t)$ , je asi najznámejším testovacím signálom pre určovanie dynamických vlastností. Je definovaná tak, že má nulovú hodnotu pre záporné hodnoty času  $t$  a jednotkovú hodnotu pre kladné hodnoty času  $t$ , teda :

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

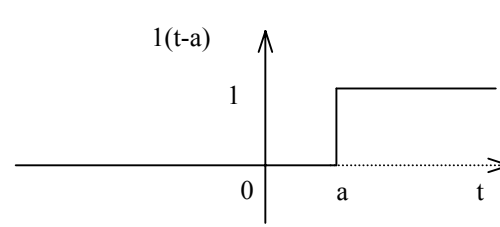

Obr. 61 : Jednotková skoková funkcia

Jej Laplaceov obraz :

$$L\{1(t), s\} = \frac{1}{s}$$

Posunutá jednotková funkcia a jej Laplaceov obraz :

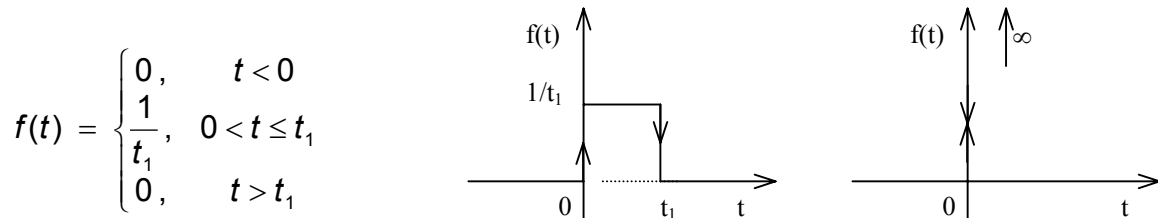
$$1(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

$$L\{1(t-a), s\} = \frac{1}{s} e^{-as}$$


Obr. 62 : Posunutá jednotková skoková funkcia

### 2.3.1.2 Jednotková impulzná funkcia

Jednotková impulzná funkcia (Diracova funkcia) je označovaná  $f(t)$ ,  $\delta(t)$ . Jednotkový impulz je obdĺžnikový impulz o šírke  $t_1$  a výške  $1/t_1$ , teda o jednotkovej ploche :



Obr. 63 : Jednotková impulzná funkcia

Laplaceov obraz impulznej funkcie :

$$F(s) \equiv L[f(t), s] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-st_1}}{st_1}$$

Obdĺžnikový impulz s jednotkovou plochou, ktorého šírka  $t_1$  sa blíži k nule a výška k  $\infty$ , sa nazýva Diracova funkcia  $\delta(t)$  :

$$\delta(t) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \delta(t, t_1).$$

Diracova funkcia nespĺňa postačujúce podmienky pre existenciu Laplaceovej transformácie, ale jej obraz vieme určiť ako limitu obrazu obdĺžnikového impulzu pre  $t_1 \rightarrow 0$  pomocou L'Hospitalovho pravidla:

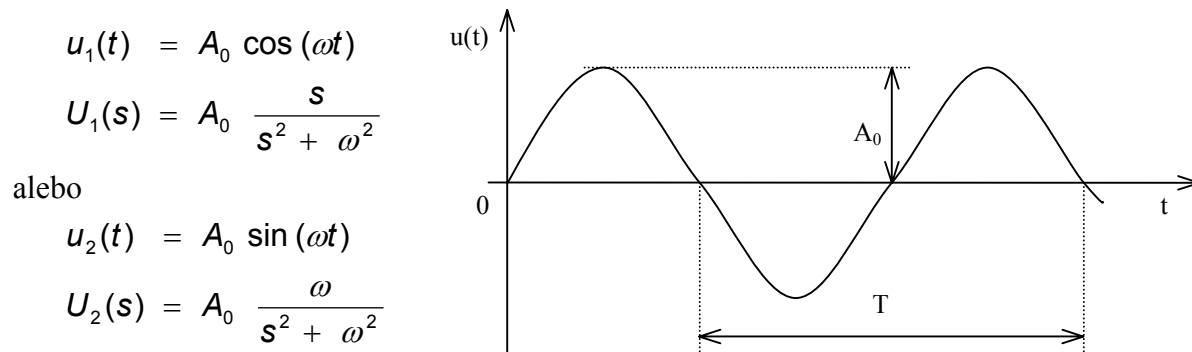
$$L[\delta(t)] = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-st_1}}{st_1} = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{s e^{-st_1}}{s} = 1$$

Medzi jednotkovou skokovou funkciou  $1(t)$  a jednotkovou impulznou funkciou  $\delta(t)$  existuje nasledujúci vzťah : Diracovu funkciu môžeme (v istom zmysle) považovať za deriváciu Heavisideovej funkcie :

$$\delta(t) = \frac{d 1(t)}{dt}.$$

### 2.3.1.3 Harmonický signál

Harmonický signál - slúži na posúdenie frekvenčných vlastností obvodu v ustálenom stave. Na vstup obvodu sa privádza harmonický signál s konštantnou amplitúdou a rôznou frekvenciou. Pri výstupnom signále nás zaujíma najmä veľkosť amplitúdy a fázový posun voči východzie mu vstupnému signálu. Harmonický signál je definovaný nasledovne :



Obr. 64 : Harmonický signál

### 2.3.2 Dynamické charakteristiky

Hocktorý z už skôr uvedených signálov je možné priviesť na vstup sústavy a sledovať výstupy sústavy - odozvy, ktoré nazývame :

- 1.) prechodová charakteristika ( odozva na jednotkovú skokovú funkciu -  $1(t)$  ),
- 2.) impulzná charakteristika ( odozva na jednotkovú impulznú funkciu -  $\delta(t)$  ),
- 3.) frekvenčná charakteristika ( odozva na harmonický signál -  $A_0 \sin(\omega t)$  ).

Prechodová charakteristika, impulzná i frekvenčná charakteristika sú iba určitou formou vyjadrenia prenosových vlastností toho istého prenosového článku (sústavy).

#### 2.3.2.1 Prechodová charakteristika

*Prechodová charakteristika* sústavy je odozva nenabudenej sústavy, teda pri nulových počiatkových podmienkach, na jednotkovú skokovú funkciu. Získame buď experimentálne, alebo riešením diferenciálnej rovnice :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 1, \quad (167)$$

resp. po Laplaceovej transformácii :

$$Y(s) [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = \frac{1}{s},$$

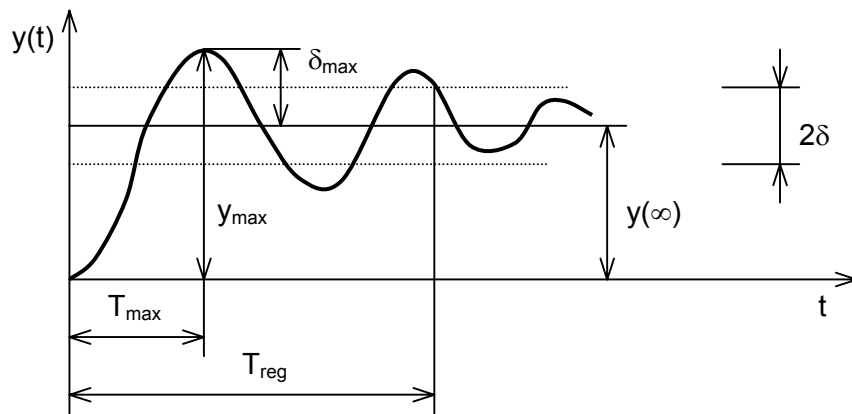
$$Y(s) = \frac{1}{s [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0]} = \frac{F(s)}{s} = Y_p(s)$$

Po nájdení koreňov charakteristickej rovnice, rozklade na parciálne zlomky a po spätnej Laplaceovej transformácii získame časový priebeh prechodovej charakteristiky, ako to bolo uvedené v časti o spätnej Laplaceovej transformácii alebo jeho grafický priebeh (Obr. 65, Obr. 66), ktorý je možné získať aj experimentálnym spôsobom priamo na zariadení.

Zo získaného riešenia môžeme potom určovať :

- ustálenú hodnotu

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t), \quad (168)$$



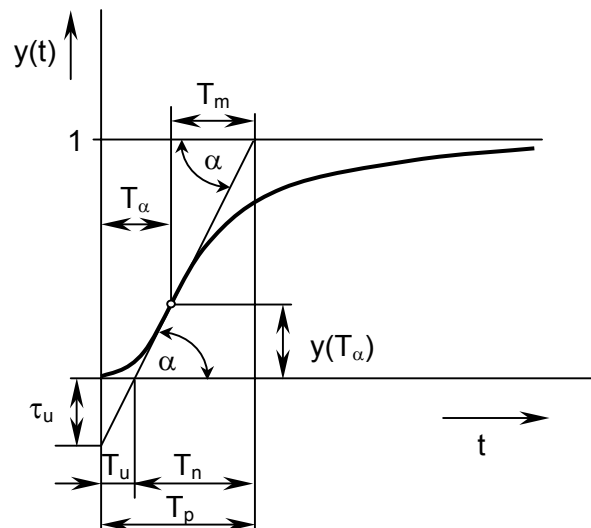
Obr. 65 : Prechodová charakteristika periodického deja

- preregulovanie

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 [\%], \quad (169)$$

kde  $y_{\max}$  je prvá a maximálna amplitúda v čase  $T_{\max}$ ,

- dobu regulácie  $T_{\text{reg}}$   $|y(T_{\text{reg}}) - y(\infty)| \leq \delta$ ,  
 $T_{\text{reg}}$  je doba, po ktorej klesne rozdiel medzi hodnotou prechodovej char.a ustálenou hodnotou pod dohodnutú hodnotu  $\delta$ ,  $T_{\text{reg}} > T_m$ ,
- rýchlosť regulácie  $T_m$   $y(T_m) = y_{pm}$   
 $T_m$  je doba, kedy nastáva prvé maximum prechodového deja,
- dobu prieťahu  $T_u$ , dobu nábehu  $T_n$  a dobu prechodu  $T_p = T_u + T_n$   
 (priesečníky dotýčnice v inflexnom bode  $\alpha$  s  $y(0)$  a  $y(\infty)$  ...)



Obr. 66 : Prechodová charakteristika aperiodického deja

**Príklad 18 :** Vyšetrite priebeh prechodovej charakteristiky a časové konštanty sústavy popísanej nasledujúcou diferenciálnou rovnicou :

$$y''(t) + 3 y'(t) + 2 y(t) = 1(t).$$

Jej riešenie je možné získať buď klasickým postupom, alebo s využitím Laplaceovej transformácie, ako to bolo prezentované v časti 2.1.4. Zo získaného riešenia :

$$y(t) = -e^{-t} + 0,5 e^{-2t} + 0,5$$

vidíme, že sa jedná o aperiodický priebeh prechodovej charakteristiky, kvalitatívne zhodnej s priebehom na Obr. 66. Z tohto riešenia vieme určiť počiatočnú a ustálenú hodnotu :

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0, \quad y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,5,$$

Extrémy určíme, ak prvú deriváciu prechodovej charakteristiky postavíme rovnú nule a zo získanej rovnice určíme zodpovedajúce časové súradnice  $t=0$  a  $t=\infty$ , čo je v súlade s priebehom na Obr. 66. Časovú súradnicu inflexného bodu určíme, ak druhú deriváciu prechodovej charakteristiky postavíme rovnú nule a zo získanej rovnice určíme zodpovedajúce časové súradnice – v danom prípade je len jeden inflexný bod, teda  $T_\alpha = -\ln(0,5) = 0,693$  s. Dosadením  $T_\alpha$  do rovnice prechodovej charakteristiky získame druhú súradnicu inflexného bodu  $y(T_\alpha) = 0,125$  a dosadením  $T_\alpha$  do rovnice prvej derivácie prechodovej charakteristiky získame smernicu dotyčnice v inflexnom bode  $y'(T_\alpha) = 0,25$ . Z uvedených troch súradníc môžeme zostrojiť rovnicu dotyčnice v inflexnom bode :

$$y_{d\alpha}(t) = y_\alpha + y'_\alpha (t - t_\alpha) = 0,125 + 0,25(t - 0,6931). \quad (170)$$

Ak do tejto rovnice dosadíme časové súradnice počiatočnej a ustálenej hodnoty  $t=0$  a  $t=\infty$ , teda  $y(0)=0$  a  $y(\infty)=0,5$ , potom z týchto rovníc vypočítaný čas predstavuje (zodpovedajúco) hľadané časové konštanty  $T_u=0,193$  a  $T_p=2,193$ , pričom  $T_n = T_p - T_u = 2$ . Podobný je aj postup v prípade periodického prechodového deja (Obr. 65), treba uvažovať len prvý inflexný bod. Explicitné vyjadrenie časových konštánt z parametrov nameranej prechodovej charakteristiky je uvedené v podkapitole 2.4.2.

Uvedenú úlohu je možné riešiť aj pomocou SIPR-a alebo MATLAB-u. Najprv si pomocou SIPR-a namodelujeme a potom vyriešime danú diferenciálnu rovnicu (časť 2.1.5). V grafických aj v numerických výstupoch si dáme zobrazit' aj prvú a druhú deriváciu riešenia. V grafickom riešení vieme z obrazovky určiť v mieste, kde druhá derivácia pretína časovú os, časovú súradnicu inflexného bodu  $T_\alpha$ . Na grafe  $y(t)$  a  $y'(t)$  v danom čase  $T_\alpha$  určíme hodnoty  $y(T_\alpha)$  a  $y'(T_\alpha)$ , z ktorých už vieme stanoviť rovnicu dotyčnice a časové konštanty. Pretože odčítanie z grafu je menej presné, vhodnejšie je určiť  $T_\alpha$ ,  $y(T_\alpha)$  a  $y'(T_\alpha)$  z numerického riešenia, pričom riešenie urobíme len málo za inflexný bod s čo najmenším časovým krokom. V riešení sa však nenachádza presná hodnota  $y''(t) = 0$  pre určenie  $T_\alpha$ , preto na výpočet  $T_\alpha$ ,  $y(T_\alpha)$  a  $y'(T_\alpha)$  použijeme dvojicu riadkov, kedy je poslednýkrát  $y''(t) > 0$  a prvýkrát je  $y''(t) < 0$ . Z ich aritmetických priemerov vypočítame hľadané  $T_\alpha$ ,  $y(T_\alpha)$ ,  $y'(T_\alpha)$ , rovnicu dotyčnice a časové konštanty. Podobne by sa postupovalo aj po vyriešení diferenciálnej rovnice v MATLAB-e (časť 2.1.6).

### 2.3.2.2 Impulzná charakteristika

*Impulzná charakteristika* sústavy je odozva nenabudenej sústavy, teda pri nulových počiatočných podmienkach, na jednotkovú impulznú funkciu (Diracovu funkciu). Získame buď experimentálne, alebo riešením homogénnej diferenciálnej rovnice :

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= \delta(t) \\ a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (171)$$

resp. po Laplaceovej transformácii :

$$Y(s) [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = 1,$$

odkiaľ platí :

$$Y(s) = \frac{1}{[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0]} = F(s) = Y_i(s)$$

Ako sme to už uvádzali v podkapitole 2.1.4, *impulzná charakteristika* alebo *váhová funkcia* je časový originál Laplaceovho obrazového prenosu sústavy. Po nájdení koreňov charakteristickej rovnice, po rozklade na parciálne zlomky a po spätnej Laplaceovej transformácii získame časový priebeh impulznej charakteristiky.

U lineárnych systémov platí medzi impulznou a prechodovou charakteristikou rovnaký vzťah, aký platí medzi vstupnými signálmi, ktorých odozvami tieto charakteristiky sú, teda vzhľadom na získané výsledky :

$$Y_p(s) = \frac{F(s)}{s}, \quad Y_i(s) = F(s),$$

Musí v oblasti obrazov aj v časovej oblasti platiť :

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= Y_p(s) s, \quad Y_p(s) = \frac{Y_i(s)}{s} \\ y_i(t) &= \frac{d y_p(t)}{dt}, \quad y_p(t) = \int_0^t y_i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (172)$$

*Impulzná funkcia je teda deriváciou prechodovej funkcie, resp. prechodová funkcia je integrálom impulznej (váhovej) funkcie.* Obidve tieto funkcie (charakteristiky) obsahujú úplnú informáciu o prenosových vlastnostiach lineárneho článku alebo sústavy.

Sústavy, u ktorých sa výstupná veličina po privedení konečnej konštantnej veličiny ustáli pre  $t \rightarrow \infty$  na novej konečnej konštantnej hodnote, nazývame *statickými*.

Sústavy, u ktorých sa výstupná veličina po privedení konečnej konštantnej veličiny neustáli pre  $t \rightarrow \infty$  na novej konečnej konštantnej hodnote, ale s rastúcim časom trvalo narastá, nazývame *astatickými sústavami* (integračné sústavy).

Z grafických priebehov prechodovej charakteristiky a z priebehov jednotlivých jej častí (exponenciálnych priebehov s reálnymi koreňmi alebo reálnymi časťami komplexne združených koreňov v exponentoch) je vidieť, že na priebeh prechodovej charakteristiky má najväčší vplyv tá exponenciála, v ktorej exponente je koreň nachádzajúci sa najbližšie k imaginárnej osi – tzv. *dominantný koreň*, ktorý má najväčšiu časovú konštantu.

### 2.3.2.3 Frekvenčná charakteristika

*Frekvenčný prenos* sústavy charakterizuje odozvu sústavy na harmonický vstupný signál o jednotkovej amplitúde a danej frekvencii za predpokladu, že pochod prebieha dostatočne dlho, až sa vytvorí ustálený stav, t.j. až časový priebeh výstupnej veličiny je čisto periodický, bez prechodovej zložky. Pri prenose harmonického signálu lineárnou prenosovou sústavou, je aj výstupný signál harmonickou funkciou času s tou istou frekvenciou, ale s určitým *oneskorením* - *fázovým posunom*. Túto odozvu získame riešením diferenciálnej rovnice :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \sin(\omega t),$$

resp. po Laplaceovej transformácii (pri nulových počiatkových podmienkach) :

$$Y(s) \left[ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ,$$

$$Y(s) = \frac{\omega}{\left[ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right] (s^2 + \omega^2)}$$

Časť charakteristickej rovnice v hranatých zátvorkách môže mať rozličné typy koreňov. U stabilných sústav musia byť reálne korene alebo reálne časti komplexne združených koreňov záporné, aby sa s rastúcim časom prechodové deje ustálili. Po určitej dobe, teda po ustálení bude prechodový dej prebiehať už len podľa koreňov druhej časti charakteristickej rovnice, čiže podľa koreňov  $(s^2 + \omega^2) = 0$ . Z celej charakteristickej rovnice :

$$\left[ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right] (s^2 + \omega^2) = 0 ,$$

Stačí uvažovať len časť charakteristickej rovnice a jej korene :

$$s^2 + \omega^2 = 0 , \quad s_{1,2} = \pm i \omega ,$$

Čomu zodpovedá riešenie v ustálenom stave :

$$y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} .$$

Po určení konštánt získame s pomocou Eulerových vzťahov aktuálne riešenie pre ustálený stav, teda výstupný signál zo sústavy. Z ustáleného riešenia vyplýva, že výstupný signál je tiež harmonický signál rovnakej frekvencie ako vstupný signál, je voči nemu fázovo posunutý a má zmenenú amplitúdu. Dá sa teda dokázať, že *frekvenčný prenos*  $F(i\omega)$  sa rovná obrazovému prenosu  $F(s)$ , do ktorého namiesto premennej "s" dosadíme imaginárnu kruhovú frekvenciu "i $\omega$ ".

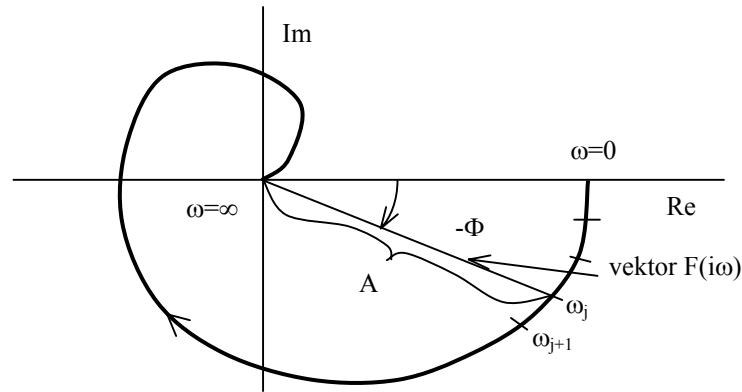
Takto definovaný frekvenčný prenos závisí od kruhovej frekvencie " $\omega$ " a predstavuje komplexné číslo, ktorého modul udáva amplitúdu a argument udáva fázové oneskorenie odozvy prenosového článku na jednotkový harmonický signál v ustálenom stave.

$$F(i\omega) = P(\omega) + i Q(\omega) = |F(i\omega)| e^{i \Phi(\omega)} \quad (173)$$

Frekvenčný prenos  $F(i\omega)$  stanovený pre jedinú frekvenciu " $\omega$ " sám o sebe neopisuje ešte prenosové vlastnosti článku. Pre dokonalý opis prenosu lineárnej sústavy je potrebné poznať frekvenčné prenosy pre kruhové frekvencie " $\omega$ " od 0 do  $\infty$ . Grafické znázornenie frekvenčného prenosu pre frekvencie " $\omega$ " od 0 do  $\infty$  sa označuje ako tzv. *frekvenčná charakteristika* (komplexná alebo Nyquistova frekvenčná charakteristika). Zobrazuje sa v Gaussovej rovine komplexných čísel ako polohový vektor o amplitúde  $A(\omega)$  a fáze  $\Phi(\omega)$ , alebo sa na reálnej a imaginárnej osi zobrazujú jeho zložky  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$  a hodnoty  $\omega$  sa vyznačujú na charakteristike ako parametre, ako to môžeme vidieť na Obr. 67.

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = |F(i\omega)| , \quad \Phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (174)$$

Pre sústavy bez dopravného oneskorenia platí, že frekvenčná charakteristika prechádza toľkými kvadrantmi Gaussovej roviny, akého je daná sústava rádu.



Obr. 67 : Nyquistova frekvenčná charakteristika

Postup výpočtu frekvenčnej charakteristiky :

- z diferenciálnej rovnice určíme obrazový prenos  $F(s)$ ,
- do prenosu  $F(s)$  dosadíme "i $\omega$ " namiesto "s" a úpravami dostaneme frekvenčný prenos  $F(i\omega)$  a z neho aj vzťahy pre amplitúdu  $A(\omega)$  a fázu  $\Phi(\omega)$  alebo zložky vektora  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$ ,
- vypočítame tabuľku hodnôt pre zložky vektora  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$  pre frekvencie :  $\omega=0$ ,  $\omega=\infty$ ,  $\omega=1$ ,  $\omega=10$ ,  $\omega=100$ ,  $\omega=1000$ , a pre iné vhodné hodnoty  $\omega$  (zobrazenie robíme iba pre  $\omega>0$ , platí *symetria* pre  $\omega<0$  vzhľadom na reálnu os),
- analytickými výpočtami zo vzťahov pre  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$  môžeme vypočítať priesečníky s osami,
- vypočítané hodnoty zložiek vektora  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$  zobrazíme v Gaussovej rovine ako body,
- jednotlivé body spojíme hladkou čiarou, ktorá predstavuje Nyquistovu frekvenčnú charakteristiku,
- na charakteristike naznačíme smer nárastu frekvencie  $\omega$ .

Ak do prenosu  $F(s)$  dosadíme namiesto "s" nie "i $\omega$ " ale "r+i $\omega$ ", úpravami dostaneme tzv. rozšírený frekvenčný prenos  $F(r+i\omega)$  a z neho rozšírenú frekvenčnú charakteristiku [50], [56] (miera stability).

Často je zvykom v rovnakých súradniciach vyznačovať priebeh  $1/A(\omega)$  v závislosti na parametri  $\omega$ . Potom dostávame tzv. *inverznú komplexnú frekvenčnú charakteristiku*.

Veľmi výhodné je znázorňovanie frekvenčných charakteristík v *logaritmických súradniciach*, pravda s ohľadom na možný rozsah amplitúd pri pomerne veľkom rozsahu možných frekvencií vhodné upravených. Po zlogaritmovaní výrazu :

$$F(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) = |F(i\omega)| e^{i\Phi(\omega)} = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}, \quad (175)$$

dostaneme výraz :  $\ln F(i\omega) = \ln A(\omega) + i\Phi(\omega)$  .

Tak sa napríklad môže znázorniť priebeh  $\ln(A(\omega))$  v závislosti od frekvencie  $\omega$  v súradniciach  $\text{Re}[\ln(A(\omega))]$ ,  $\text{Im}[\ln(A(\omega))]$ . Pričom je :

$$\text{Re}[\ln F(i\omega)] = \ln A(\omega) \quad a \quad \text{Im}[\ln F(i\omega)] = \arg A(\omega) = \Phi(\omega) ,$$

čím dostaneme Nicholsov diagram, alebo namiesto jedného spoločného diagramu sa zobrazí logaritmus prenosu  $\ln F(i\omega)$  dvoma charakteristikami :

1. *logaritmickou amplitúdovou charakteristikou* (zvislá os  $\ln A(\omega)$  v [dB], [N], vodorovná os  $\ln \omega$  ),
2. *fázovou charakteristikou* (zvislá os - fáza  $\Phi(\omega)$ , vodorovná os  $\ln \omega$  ) .

Pre logaritmické frekvenčné charakteristiky amplitúdové a fázové sa často používajú vhodné logaritmické jednotky. Frekvenciu  $\omega$  je obvyčajne treba znázorniť v jej veľkom rozsahu, preto sa s výhodou používa vyjadrenie v dekadách, kde 10 – násobky frekvencie  $\omega$  vytvárajú rovnomernú stupnicu osi  $\log \omega$  s jednotkovým modulom odpovedajúcim desať násobku. Pretože amplitúda  $|A|$  sa mení menej výrazne pre vyjadrenie jej logaritmu, používame iné jednotky prevzaté z akustiky.



Pre objasnenie terminológie prevzatej z akustiky a často používanej pri konštrukcii frekvenčných logaritmických charakteristík, uvedieme niektoré základné pojmy :

- a) Ak dve frekvencie  $\omega_2$  a  $\omega_1$  sa líšia od seba dvojnásobne, t.j. ak platí

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 ,$$

potom hovoríme, že frekvencie  $\omega_1$  a  $\omega_2$  sa líšia od seba o jednu *oktávu*. Z toho plynie, že ak na jednu (vodorovnú) os budeme vynášať logaritmus pri základe 2, potom dostaneme rovnaké intervaly – oktávy – vo vzdialenosti  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $4\omega$ , atď.

- b) Ak dve frekvencie  $\omega_2$  a  $\omega_1$  sa líšia od seba desaťnásobne, t.j. ak platí

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10 ,$$

potom hovoríme, že frekvencie  $\omega_1$  a  $\omega_2$  sa odlišujú od seba o jednu *dekádu*. Preto ak na vodorovnú os budeme vynášať logaritmus pri základe 10, dostaneme rovnaké intervaly – dekády – vo vzdialenosti  $\omega$ ,  $10 \omega$ ,  $100 \omega$ , atď.

- c) Dva výkony  $N_1$  a  $N_2$  sa líšia od seba o jeden *bel* [B], ak platí

$$\log \frac{N_2}{N_1} = 1 ,$$

alebo o jeden decibel [dB], ak

$$10 \log \frac{N_2}{N_1} = 1 .$$

Z uvedenej definície 1 belu vyplýva, že veličiny  $U_1$  a  $U_2$ , ktorých kvadrát je úmerný výkonu, sa líšia od seba o jeden decibel, ak platí :

$$10 \log \frac{U_2^2}{U_1^2} = 1 ,$$

čiže keď :

$$20 \log \frac{U_2}{U_1} = 1 .$$

To sa často používa pri konštruovaní frekvenčných charakteristík v logaritmických súradniciach, keď vynášame 20-násobok logaritmu amplitúdy [ $20 \log(A(\omega))$ ] v [dB].

- d) Dve veličiny  $U_1$  a  $U_2$  sa líšia od seba o jednu *neper* [N], ak platí :

$$\ln \frac{U_2}{U_1} = 1$$

Býva zvykom konštruovať frekvenčné logaritmické charakteristiky v sústavách :

decibel	-	dekáda,
neper	-	oktáva,
decibel	-	oktáva,
neper	-	dekáda.

Najrozšírenejšou je sústava decibel – dekáda, kde na vodorovnú os nanášame  $\log(\omega)$  (v dekádach) a na zvislú os amplitúdu v decibeloch, t. j.  $20 \log(A(\omega))$ . Musíme si však uvedomiť, že to platí len pre amplitúdu, fázu  $\varphi$  treba znázorňovať zvlášť.

Ako bolo uvedené, v elektrotechnickej teórii a praxi sa často stretnete s pojmom *decibel*. Často sa napríklad uvádza, že zosilňovač má zisk 24 dB, že zisk antény je 8 dB, alebo rušenie od napájacieho zdroja je 45 dB, alebo oddelenie kanálov je 40 dB a podobne.

**Zosilnenie a zisk** : Ak chceme napríklad vedieť pre nízkofrekvenčný zosilňovač, o koľko je signál na výstupe silnejší (alebo slabší) ako na vstupe, vezmete na to vhodný generátor a pripojíme ho na vstup zosilňovača. Vhodným meracím prístrojom, napr. nízkofrekvenčným milivoltmetrom zmeriame napätie na vstupe zosilňovača  $U_1$  a na výstupe  $U_2$ . Zosilnenie je potom dané vzťahom :

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} \quad (176)$$

a zistíme takto, že výstupné zosilnenie je väčšie napr. 80-krát. Ak toto zosilnenie chceme vyjadriť v decibeloch, vypočítame ho podľa vzťahu :

$$A_U = 20 \log \frac{U_2}{U_1} \quad (177)$$

a teraz už hovoríme o zisku. Zosilňovač s 80 násobným zosilnením má zisk  $A_U = 20 \log 80 = 38,06$  dB. Pre prúdové zosilnenie platí :

$$A_I = \frac{I_2}{I_1},$$

resp. v decibeloch :

$$A_I = 20 \log \frac{I_2}{I_1},$$

Ináč vyzerá zosilnenie a zisk pre výkon :  $A_P = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}$ . Zisk pre výkon v decibeloch sa

počíta ako pre napätie alebo prúd, len násobiaca konštanta nie je 20 ale 10 :

$$A_P = 10 \log \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \log \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \log \frac{U_2}{U_1} \quad (178)$$

**Príklad 19** : Potrebujeme určiť prúdové zosilnenie a zisk pre výkon, ak platí  $U_1=1V$ ,  $U_2=3V$ ,  $I_1=1A$ ,  $I_2=3A$ . Potom aplikáciou predošlých vzorcov vychádza zisk  $A_U = 9,54$  dB,  $A_I = 9,54$  dB a  $A_P = 9,54$  dB.

**Počítanie s decibelmi** : Aj keď môže počítanie s decibelmi vyzeráť na prvý pohľad zložito, v mnohých zložitejších prípadoch naopak počítanie v decibeloch zjednoduší prácu. Uvedieme si niekoľko príkladov.

**Príklad 20** : Predzosilňovač nízkofrekvenčného signálu má 60 násobné zosilnenie. Za ním je regulátor hlasitosti, ktorý signál 23 násobne zoslabí. Nasleduje koncový zosilňovač s 32 násobným zosilnením. Zaujímá nás, aké je zosilnenie a zisk celého reťazca?

Pre zosilnenie platí :

$$A = A_1 * A_2 * A_3 = 60 * 1/23 * 32 = 83,48$$

Pre zisk platí :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 20 \log 60 + 20 \log 1/23 + 20 \log 32 = 35,6 - 27,2 + 30,1 = 38,5 \text{ dB}$$

Kontrolou :

$$A = 20 \log 83,48 = 38,43 \text{ dB}$$

je možné overiť správnosť postupu.

Pri výpočtoch sa zosilnenie medzi stupňami sa násobí, zisk sa sčítava, čo je veľká výhoda.

**Príklad 21 :** Útlm vysokofrekvenčných káblov sa udáva pre danú frekvenciu v decibeloch na dĺžku kábla. Kábel, použitý na zvod od antény má útlm napr. 20 dB/100 m. Aký veľký je útlm kábla 15 m dlhého?

Výpočet urobíme ľahko cez trojčlenku, odkiaľ dostaneme :

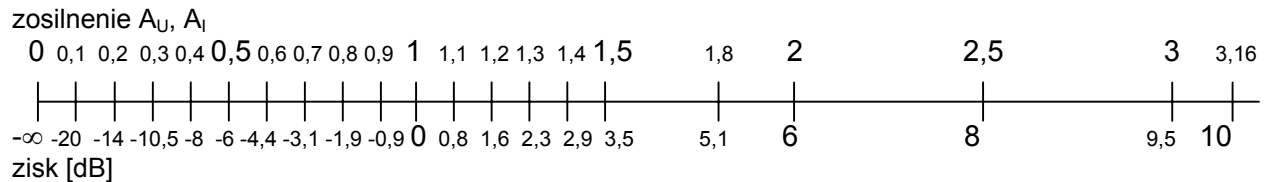
$$N = (20 \cdot 15) / 100 = 3 \text{ dB.}$$

Pre praktické použitie môže byť veľmi vhodná tabuľka Tab. 1. Pred časom sa pre zisk a útlm používala jednotka Neper [Np], pričom platí  $1\text{Np} = 8,686 \text{ dB}$ .

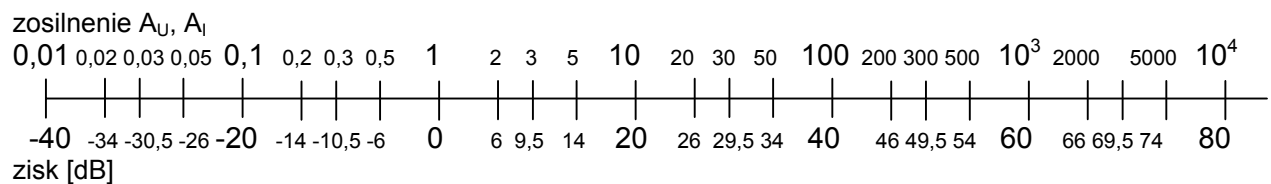
zosilnenie 0,1	zisk – 20 dB
0,2	-14dB
1/2	-6 dB
1/√2	-3 dB
- 10 %	cca -1 dB
1	0 dB
+ 10 %	cca 1 dB
√2	3 dB
2	6 dB
5	14 dB
10	20 dB

Tab. 1 : Prevod zosilnenia na zisk v decibeloch

Závislosť medzi zosilnením a ziskom je názorne vidieť na Obr. 68 a Obr. 69, kde je táto závislosť vynesena najprv v lineárnych a potom v logaritmických súradniciach.



Obr. 68 : Napätové, prúdové zosilnenie a zisk v lineárnych súradniciach



Obr. 69 : Napätové, prúdové zosilnenie a zisk v logaritmických súradniciach

Pri zostrojovaní frekvenčných charakteristík v logaritmických súradniciach môžeme postupovať dvojakým spôsobom :

- pre každé zvolené  $\omega$  stanovíme presnú hodnotu  $A(\omega)$  v [dB], alebo v [N] a takto vypočítané hodnoty vynesieme do roviny zvolenej sústavy. Ich spojnice dáva hľadanú charakteristiku. Hoci je tento postup pomerne zdĺhavý, s využitím počítačov to už neplatí. V minulosti sa však používali aj zjednodušené metódy, ako napríklad
- volila sa približná metóda vyhovujúca pre prax, ktorá spočíva v tom, že presná logaritmická frekvenčná charakteristika sa aproximovala asymptotami, ktoré ju s dostatočnou presnosťou nahrádzujú. Tento postup bol v minulosti používaný najčastejšie, preto si vysvetlíme jeho podstatu.

Nech sústava, ktorej frekvenčné logaritmické charakteristiky chceme zobraziť, má prenos:

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

Ak rovnice  $M(s)=0$  a  $N(s)=0$  majú reálne korene, môžeme daný prenos upraviť vždy na tvar koreňových činiteľov typu  $(T_k s + 1)$ , čiže :

$$F(s) = \frac{k \prod_m (T_m s + 1)}{s \prod_n (T_n s + 1)} \tag{179}$$

Logaritmus prenosu  $F(s)$  bude

$$\log F(s) = \log k + \sum_{k=1}^m \log(sT_k + 1) - \log s - \sum_{l=1}^n \log(sT_l + 1)$$

alebo

$$\log F(i\omega) = \log k + \sum_{k=1}^m \log(i\omega T_k + 1) - \log(i\omega) - \sum_{l=1}^n \log(i\omega T_l + 1)$$

Z tejto rovnice vyplýva, že frekvenčný prenos  $F(i\omega)$  v logaritmických súradniciach zostrojíme ako súčet, alebo rozdiel jednotlivých koreňových činiteľov, a že obsahuje lineárnu kombináciu tvarov :

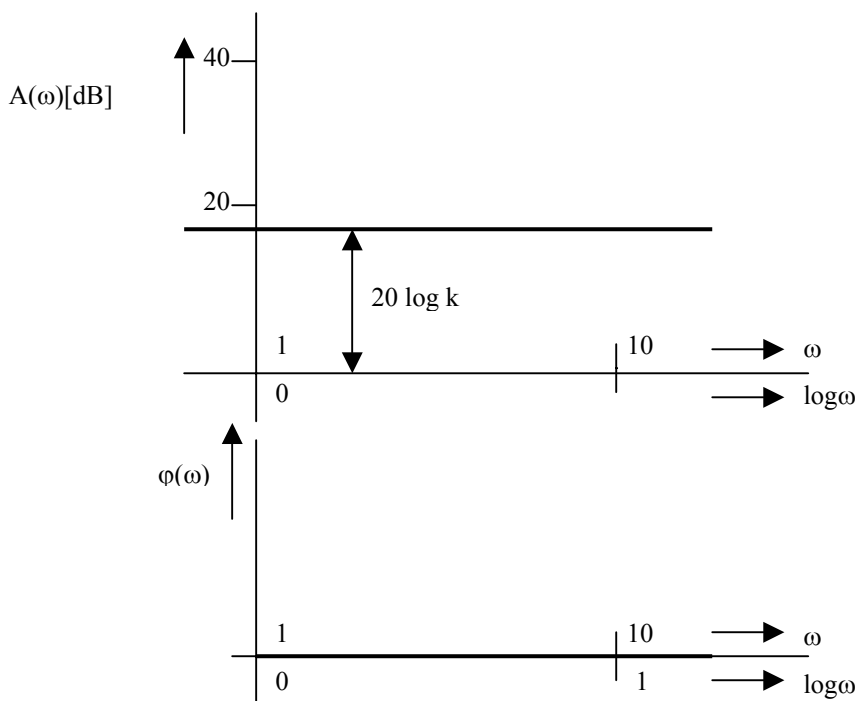
$$\log k, \quad \log(i\omega), \quad \log(i\omega T_k + 1)$$

Vyšetríme ako sa zobrazia tieto tvary v sústave decibel – dekáda.

a) Tvar  $F(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = ke^{i\varphi(0)} = k,$

preto je potrebné stanoviť :  $20 \log|F(i\omega)| = 20 \log k$

V sústave decibel – dekáda bude amplitúdová charakteristika daná priamkou rovnobežnou s osou  $\log \omega$  [dek] vo vzdialenosti  $20 \log k$  [dB]. Fázová charakteristika je priamka vo vzdialenosti  $\varphi = 0^\circ$ . Obidve charakteristiky sú znázornené na nasledujúcom obrázku :

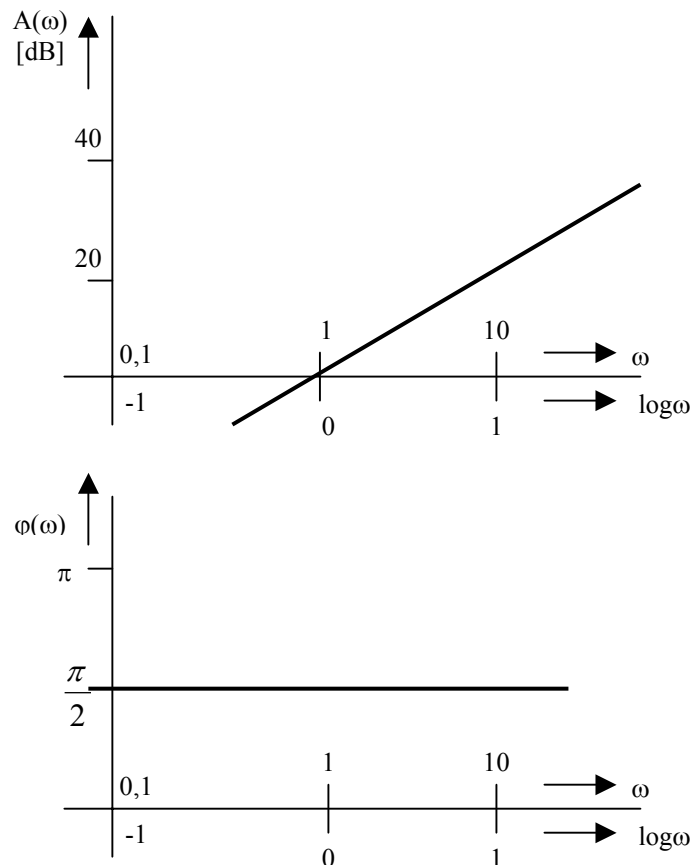


Poznámka: Os pre  $A(\omega)$  v [dB] a pre  $\varphi(\omega)$  môže pretínať os  $\log \omega$  v ľubovoľnom mieste (podľa rozsahu frekvencie, v ktorom vyšetrujeme daný člen), pretože logaritmická stupnica nemá bod pre  $\omega=0$ .

b) Tvar  $F(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = i\omega = \omega e^{i\frac{\pi}{2}}$  bude mať amplitúdovú charakteristiku danú vzťahom :

$$20 \log|F(i\omega)| = A(\omega) = 20 \log \omega ,$$

čo je priamka prechádzajúca bodom  $\omega=1$ , ktorá má stúpanie 20 [dB / dek], pretože ak  $\omega = 1$ , potom je  $A(\omega) = 20 \log 1 = 0$  [dB], a keď  $\omega=10$ , je  $A(\omega) = 20 \log 10 = 20$  [dB]. Fázová charakteristika bude priamka vo vzdialenosti  $+\pi/2$  od osi  $\log \omega$  :



c) Tvar  $F(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = i\omega T_k + 1 = \sqrt{T_k^2 \omega^2 + 1} e^{i \arctg \omega T_k}$  aproximujeme takto :

Ak  $\omega < 1/T_k$ , potom je  $\omega T_k < 1$  a  $\omega^2 T_k^2 \ll 1$  a platí :

$$A(\omega) = 20 \log \sqrt{T_k^2 \omega^2 + 1} = 20 \log 1 = 0 \quad [dB].$$

Ak  $\omega > 1/T_k$ , potom je  $\omega T_k > 1$  a  $\omega^2 T_k^2 \gg 1$  a platí :

$$A(\omega) = 20 \log \sqrt{T_k^2 \omega^2 + 1} = 20 \log T_k \omega .$$

Ak meníme frekvenciu  $\omega$  v rozpätí jednej dekády, t. j.  $1/T_k \leq \omega \leq 10/T_k$ , potom dostaneme  $\omega = 1/T_k$  a :

$$A(\omega) = 20 \log T_k \frac{1}{T_k} = 20 \log 1 = 0 \quad [dB].$$

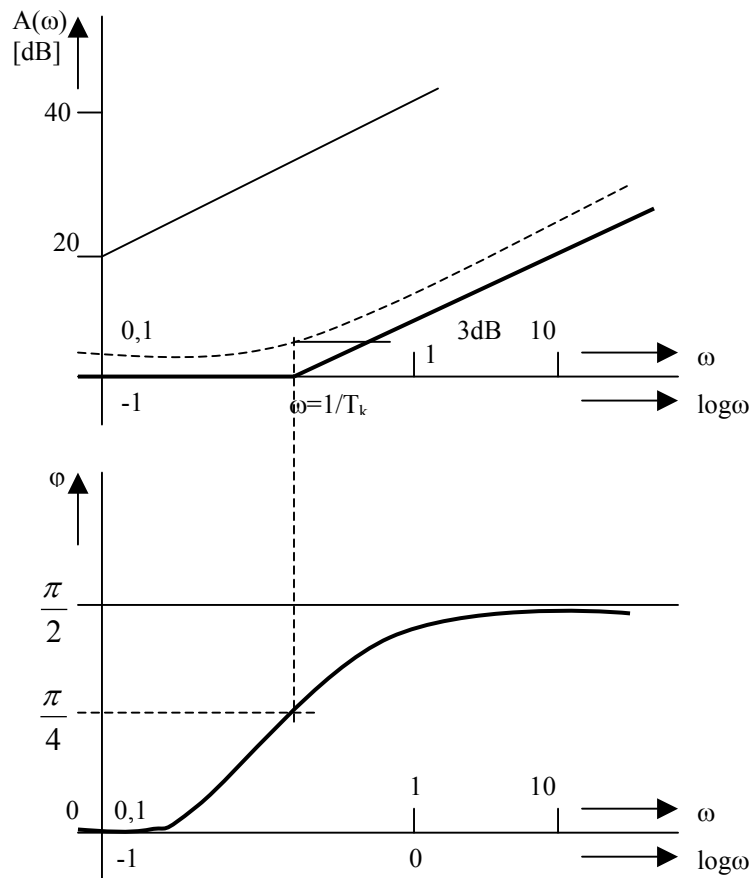
Pre  $\omega = 10/T_k$ , potom platí :

$$A(\omega) = 20 \log T_k \frac{10}{T_k} = 20 \log 10 = 20 \text{ [dB]}.$$

Z toho vyplýva, že stúpanie je 20 dB / dek. Ak bude  $\omega = 1/T_k$ , potom platí :

$$A(\omega) = 20 \log \sqrt{T_k^2 \omega^2 + 1} = 20 \log \sqrt{2} = 3 \text{ [dB]}.$$

Tým je daná maximálna nepresnosť, ktorej sa touto aproximáčnou metódou dopúšťame v priesečníku asymptôt. Presná logaritmická amplitúdová charakteristika musí teda prechádzať bodom so súradnicami  $[1/T_k, 3 \text{ dB}]$  a je znázornená čiarkovane na nasledujúcom obrázku :



Obr. 70 : Aproximácia amplitúdovej charakteristiky asymptotami

Fázová charakteristika prechádza z  $\varphi=0^\circ$  na  $\varphi=90^\circ$ , pričom pre frekvenciu  $\omega=1/T_k$ , je fáza  $\varphi=45^\circ$ , pretože  $\varphi=\arctg T_k\omega$ , a pre  $\omega<1/T_k$  je  $F(i\omega)=iT_k\omega+1=1$ , preto  $\varphi=0^\circ$ . Pre  $\omega>1/T_k$  je  $F(i\omega)=iT_k\omega+1=iT_k\omega$ , preto  $\varphi=90^\circ$ . Pre  $\omega = 1/T_k$  bude  $\varphi(\omega)=\arctg T_k\omega = \arctg 1 = \pi/4 = 45^\circ$ . Presný priebeh  $\varphi(\omega)$  je podľa vzťahu  $\varphi(\omega)=\arctg T_k\omega$ .

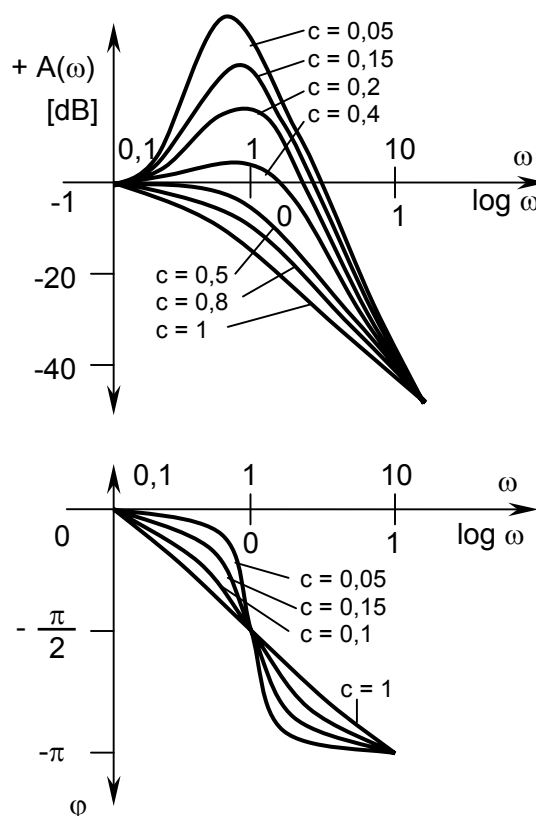
d) Polynómy  $M(s)$  a  $N(s)$  môžu mať tiež korene komplexne združené, ktorým zodpovedá koreňový činiteľ tvaru :

$$\frac{1}{T^2(i\omega)^2 + 2cT(i\omega) + 1}$$

Keď upravíme tento výraz substitúciou  $T=1/\omega_0$  na tvar :

$$\frac{1}{(1 - \omega^2 / \omega_0^2) + i 2c \omega / \omega_0}$$

kde  $\omega_0$  je frekvencia prislúchajúca priesečníku asymptôt frekvenčnej charakteristiky, potom je zrejmé, že pre  $\omega/\omega_0 < 1$  je graf tejto funkcie priamka 0 [dB]. Pre  $\omega/\omega_0 > 1$  je to priamka so sklonom -40 [dB/dek]. Pre  $\omega/\omega_0 = 1$  sa hodnota tejto funkcie rovná  $-20\log 2c$ . Pre  $2c < 1$  to bude hodnota kladná, pre  $2c > 1$  záporná. Grafické zobrazenie tohto prípadu pre rôzne hodnoty  $c$  je uvedené na Obr. 71.



Obr. 71 : Chyby aproximácie amplitúdovej charakteristiky asymptotami

Náhradou presnej amplitúdovej charakteristiky iba asymptotami sa dopustíme určitej chyby, ktorá sa dá kvantifikovať, ako je to urobené napr. na Obr. 70 v prípade c) už uvedeného postupu a tiež podrobne aj v prípade d) na Obr. 71. Merítkom spomínanej chyby je veľkosť súčiniteľa  $c$ . Pri náhrade amplitúdových charakteristík asymptotami o sklone 0 a -40 dB/dek je chyba menšia ako  $\pm 3$  dB, keď súčiniteľ  $c$  leží v medziach  $0,4 \leq c \leq 0,7$ . Keď hodnota súčiniteľa  $c$  leží mimo týchto medzí, musíme priebeh charakteristiky v blízkosti  $\omega = \omega_0$  vypočítať zo vzťahu pre  $A$ . V neskôr uvedenom príklade 25, keď  $c=0,45$ , nie je potrebné presný priebeh počítať.

Teda všeobecný postup pri konštrukcii približných frekvenčných charakteristík v logaritmickej súradniciach je nasledovný :

1. Upravíme frekvenčný prenos na tvar koreňových činiteľov (179).
2. Urobíme výpočet  $20 \cdot \log F(i\omega)$ , zostavíme jednotlivé časti podľa veľkosti časových konštánt od najväčšej k najmenšej. Toto poradie nám umožní sčítat charakteristiky patriace jednotlivým koreňovým činiteľom aritmeticky, čo je výhodnejšie, ako sčítanie grafické.
3. Z časových konštánt  $T_k$  stanovíme body zlomu  $\omega_k = 1/T_k$  a usporiadame ich  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$ .
4. Aproximujeme celý prenos  $F(i\omega)$  v jednotlivých intervaloch a zakresľujeme logaritmickej frekvenčnej charakteristiky na základe už uvedených typových tvarov.
5. Začneme od najnižších frekvencií. Ak prenos nemá pól v počiatku, začína amplitúdová charakteristika asymptotou so sklonom 0 dB/dek, posunutú o  $20 \cdot \log K$ , kde  $K$  je zosilnenie.

Pri jednonásobnom póle v počiatku má prvá asymptota sklon -20 dB/dek, pre  $\omega = 1$  prechádza bodom  $20 \log K$  a pretína os 0 dB pri  $\omega = K$ .

6. Prvá asymptota prebieha od najnižších kmitočtov  $\omega \rightarrow 0$  až do kmitočtu zlomu  $\omega_1$ , ktorý odpovedá prvému členu  $(1+i\omega T_1)$ . Nová asymptota má sklon o +20 dB/dek alebo -20 dB/dek väčší ako predošlá asymptota podľa toho či je to člen čitateľa alebo menovateľa, atď.
7. Ak prenos má kvadratický člen, mení sa sklon o  $\pm 40$  dB/dek.

**Príklad 22 :** Zostrojte Nyquistovu frekvenčnú charakteristiku sústavy s nasledujúcim prenosom :

$$F(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Frekvenčný prenos je :

$$F(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega + 1}, \text{ po úprave : } F(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega T} \frac{1-i\omega T}{1-i\omega T} = \frac{1-i\omega T}{1+\omega^2 T^2} = P(\omega) + iQ(\omega)$$

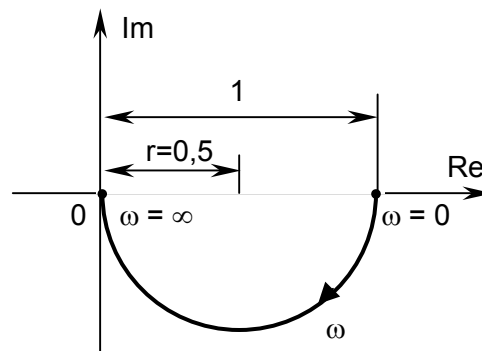
kde

$$P(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} \quad a \quad Q(\omega) = \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2}.$$

Rovnicu krivky  $F(i\omega)$  dostaneme v tvare :  $P(\omega)^2 - P(\omega) + Q^2(\omega) = 0$   
a po úprave

$$\left(P(\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + Q^2(\omega) = 0$$

Je to rovnica kružnice so stredom na reálnej osi, s polomerom  $r=1/2$ , ktorá prechádza počiatkom. Zobrazenie robíme iba pre kladné  $\omega$ . Platí symetria pre  $\omega < 0$  vzhľadom na reálnu os, teda pre  $\omega < 0$  by to bola polkružnica nad Re.



**Príklad 23 :** Zostrojte Nyquistovu frekvenčnú charakteristiku sústavy popísanej diferenciálnou rovnicou :

$$4 y'' + 2 y' + 0,5 y = u$$

Pri nulových počiatkových podmienkach bude jej Laplaceov obraz :

$$(4 s^2 + 2 s + 0,5) Y(s) = U(s) \quad a \text{ prenos} \quad F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{4s^2 + 2s + 0,5}$$

Frekvenčný prenos má tvar : 
$$F(i\omega) = \frac{1}{4(i\omega)^2 + 2i\omega + 0,5} = \frac{1}{0,5 - 4\omega^2 + 2i\omega}$$

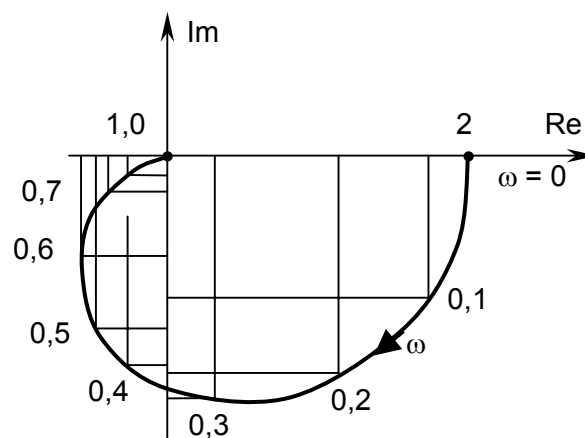
Aby sme tento prenos mohli rozdeliť na časť reálnu a časť imaginárnu, vynásobíme čitateľa aj menovateľa komplexne združeným číslom ku menovateľu. Dostaneme :



$$F(i\omega) = \frac{1}{0,5 - 4\omega^2 + 2i\omega} \frac{0,5 - 4\omega^2 - 2i\omega}{0,5 - 4\omega^2 - 2i\omega} = \frac{0,5 - 4\omega^2}{16\omega^2 + 0,25} - i \frac{2\omega}{16\omega^2 + 0,25} = P(\omega) + iQ(\omega)$$

Dosadením do rovnice frekvenčného prenosu za  $\omega = 0$  až  $\infty$  získame hodnoty  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$ , ktoré zapíšeme do tabuľky a z nej zostrojíme priebeh frekvenčnej charakteristiky :

$\omega$	0	$\infty$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	1
$P(\omega)$	+2	0	+1,83	+1,23	+0,37	-0,22	-0,40	-0,43	-0,36	-0,21
$Q(\omega)$	0	0	-0,75	-1,45	-1,58	-1,27	-0,80	-0,54	-0,34	-0,12



S využitím simulačného systému MATLAB ([43], [75], [76], [77], PRÍLOHA C - Tab. 7 až Tab. 12) je možné túto úlohu vyriešiť veľmi jednoducho napr. použitím príkazového súboru na Obr. 72. V tomto súbore sú príkazy aj na vytvorenie súborov s obrázkom Nyquistovej komplexnej frekvenčnej charakteristiky v dvoch formátoch. Jej graf pre kladné aj záporné frekvencie je na Obr. 73.

```
% Nyquistova frekvenčná charakteristika

cit=[1]; % koeficienty polynómu čitateľa
men=[4 2 0.5]; % koeficienty polynómu menovateľa
[mag,phase,w]=bode(cit,men);
%[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);

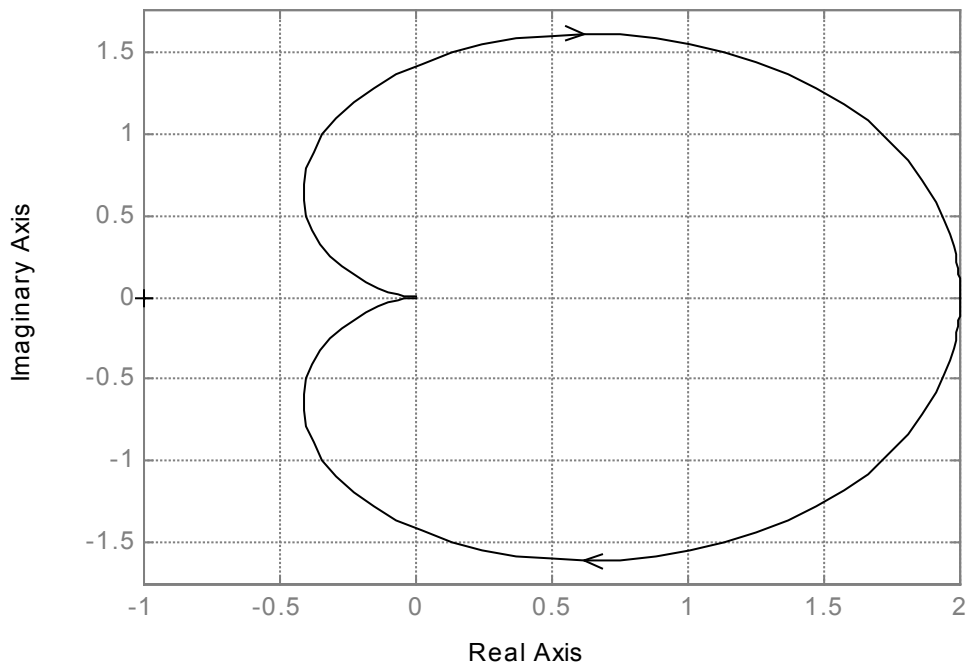
nyquist(cit,men,'k') % výpočet Nyquistovej charakteristiky
grid;

%title(['Gain Margin = ',num2str(Gm),' Phase margin = ',num2str(Pm)]);

print -deps Obra2.eps % uloženie obrázku vo formáte EPS
print -dbitmap Obra2.bmp % uloženie obrázku vo formáte BMP
end
```

Obr. 72 : Príkazový súbor pre výpočet Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky

Nyquist Diagrams



Obr. 73 : Graf Nyquistovej komplexnej frekvenčnej charakteristiky

**Príklad 24 :** Popíšte klasický postup výpočtu logaritmickej frekvenčnej charakteristiky (v súradniciach decibel -dekáda) a ukážte postup jej získania pomocou MATLAB-u pre sústavu popísanú difer. rovnicou :

$$2,5 y'' + 3 y' + 0,5 y = u$$

Laplaceov obraz difirenciálnej rovnice pri nulových počiatkových podmienkach bude :

$$(2,5 s^2 + 3 s + 0,5) Y(s) = U(s)$$

a obrazový a frekvenčný prenos má tvar :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2,5s^2 + 3s + 0,5}, \quad F(i\omega) = \frac{1}{-2,5\omega^2 + 3i\omega + 0,5}$$

$$F(i\omega) = \frac{-2,5\omega^2 + 0,5}{6,25\omega^4 + 6,5\omega^2 + 0,25} + i \frac{-3\omega}{6,25\omega^4 + 6,5\omega^2 + 0,25} = P(\omega) + i Q(\omega)$$

Pre výpočet logaritmickej frekvenčnej charakteristiky bez MATLABu by sme si upravili frekvenčný prenos na tvar :

$$F(i\omega) = \sqrt{\frac{1}{6,25\omega^4 + 6,5\omega^2 + 0,25}} e^{i \arctg \frac{-3\omega}{-2,5\omega^2 + 0,5}} = A(\omega) e^{i \Phi(\omega)}$$

Ak by sme si zostrojili nižšie uvedenú tabuľku hodnôt  $20 \log A(\omega)$  a  $\Phi(\omega)$  v závislosti od kruhovej frekvencie  $\omega$  a na vodorovnú os frekvenčných charakteristík vynášali  $\log \omega$ , dostali by sme amplitúdovú charakteristiku v dB ako je to na Obr. 75.

$\omega$ [rad/sek]	0	0,01	0,1	1	10
$20 \log A(\omega)$ [dB]	+6,02	+6	+5	-11,4	-48
$\Phi(\omega)$ [deg]	0	-3,4	-32	-123	-173

Pre aproximáciu asymptotami si frekvenčný prenos upravíme do tvaru :

$$F(i\omega) = \frac{k}{(T_1 i\omega + 1)(T_2 i\omega + 1)}, \quad \text{t.j. v našom prípade na tvar} \quad F(i\omega) = \frac{2}{(5i\omega + 1)(i\omega + 1)}$$

Pre vyjadrenie amplitúdy v [dB] logaritmujeme tento frekvenčný prenos a dostaneme :

$$A[\text{dB}] = 20 \log|f(i\omega)| = 20 \log 2 - 20 \log|5i\omega + 1| - 20 \log|i\omega + 1| = A_1 + A_2 + A_3$$

Vyjadríme jednotlivé amplitúdové charakteristiky pre  $A_1, A_2, A_3$  :

$$A_1 = 20 \log 2 = 20 \cdot 0,301 = 6,02 \text{ dB}$$

Teda amplitúdová charakteristika  $A_1$  prebieha rovnobežne s osou frekvencií vo vzdialenosti 6,02 dB. Fázová charakteristika má stále hodnotu  $0^\circ$ . Pre  $A_2$  platí :

$$A_2 = -20 \log|5i\omega + 1| = -20 \log \sqrt{25\omega^2 + 1}$$

Charakteristiku  $A_2$  nahradíme asymptotami :

$$\text{Pre } 25\omega^2 \ll 1 \text{ bude } A_2 = -20\log 1 = 0, \quad \text{pre } 25\omega^2 \gg 1 \text{ bude } A_2 = -20\log 5\omega.$$

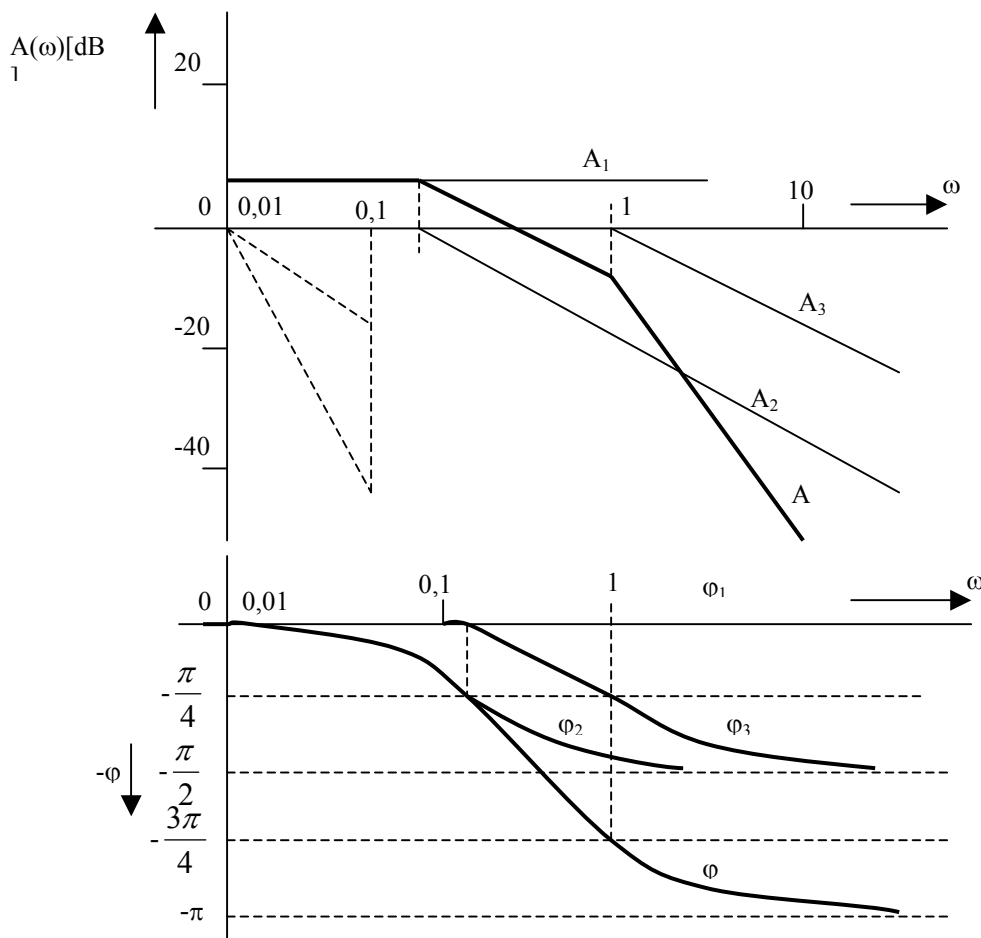
Amplitúdová charakteristika  $A_2$  má teda až do frekvencie  $5\omega = 1$ , t.j. do frekvencie  $\omega = \omega_T = 0,2$  (tzv. vzťažnej frekvencie) sklon 0 dB/dek a pre  $\omega > \omega_T$  má trvalý sklon  $-20$  dB/dek. Napr. pre  $\omega=2$  je  $A_2=-20$  dB, a pre  $\omega = 20$  je  $A_2 = -40$  dB, atď. Odpovedajúca fázová charakteristika  $\varphi_2$  dosahuje pri  $\omega_T = 0,2$  fázové posunutie  $-45^\circ$ . Pre  $A_3$  platí :

$$A_3 = -20 \log|i\omega + 1| = -20 \log \sqrt{\omega^2 + 1}$$

Podobne ako pre charakteristiku  $A_2$ , nahradíme aj charakteristiku  $A_3$  jej asymptotami :

$$\text{Pre } \omega^2 \ll 1 \text{ bude } A_3 \approx -20\log 1 = 0, \quad \text{pre } \omega^2 \gg 1 \text{ bude } A_3 \approx -20\log \omega.$$

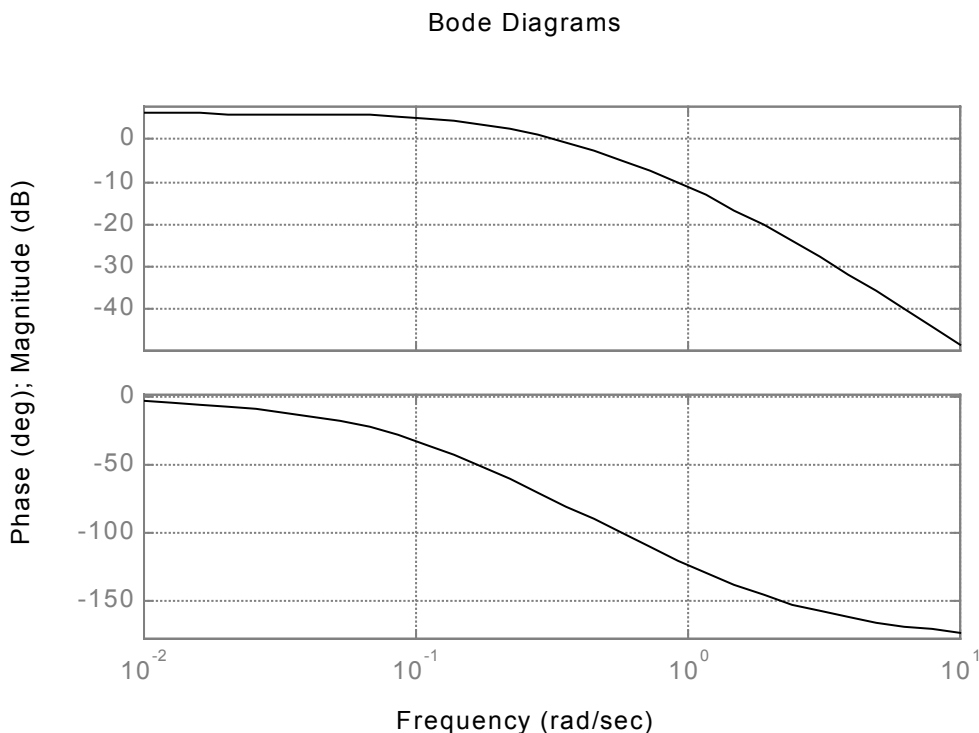
Amplitúdová charakteristika  $A_3$  má až do frekvencie  $\omega=1$ , teda do  $\omega = \omega_T = 1$  sklon 0 dB/dek a pre  $\omega > \omega_T$ , má trvalý sklon  $-20$  dB/dek. Napr. pre  $\omega = 10$ , je  $A_3 = -20$  dB a pre  $\omega = 100$ , je  $A_3 = -40$  dB, atď. Fázová charakteristika  $\varphi_3$  dosahuje pri  $\omega_T=1$  fázové posunutie  $-45^\circ$ . Výslednú charakteristiku amplitúdovú  $A$ , aj fázovú  $\varphi$  dostaneme sčítaním dielčích charakteristík, čo je znázornené na nasledujúcom obrázku :



Na Obr. 74 je príklad príkazového súboru pre výpočet a zobrazenie logaritmickej frekvenčnej charakteristiky danej sústavy. V tomto súbore sú príkazy aj na vytvorenie súborov s obrázkom v dvoch formátoch. Grafické zobrazenie amplitúdovej a fázovej charakteristiky je na Obr. 75. Ďalšie možnosti výpočtu frekvenčných charakteristik a ďalšie možnosti analýzy vo frekvenčnej oblasti (amplitúdová a fázová bezpečnosť, frekvencia prechodu atď.) je možné nájsť v literatúre [43], [75], [76], [77].

```
% Logaritmickej frekvenčná charakteristika
cit=[1]; % koeficienty polynómu čitateľa
men=[2.5 3 0.5]; % koeficienty polynómu menovateľa
bode(cit,men,'k') % výpočet Bodeho charakteristiky
grid;
print -deps Obra3.eps % uloženie obrázku vo formáte EPS
print -dbitmap Obra3.bmp % uloženie obrázku vo formáte BMP
end
```

Obr. 74 : Príkazový súbor pre výpočet logaritmickej frekvenčnej charakteristiky



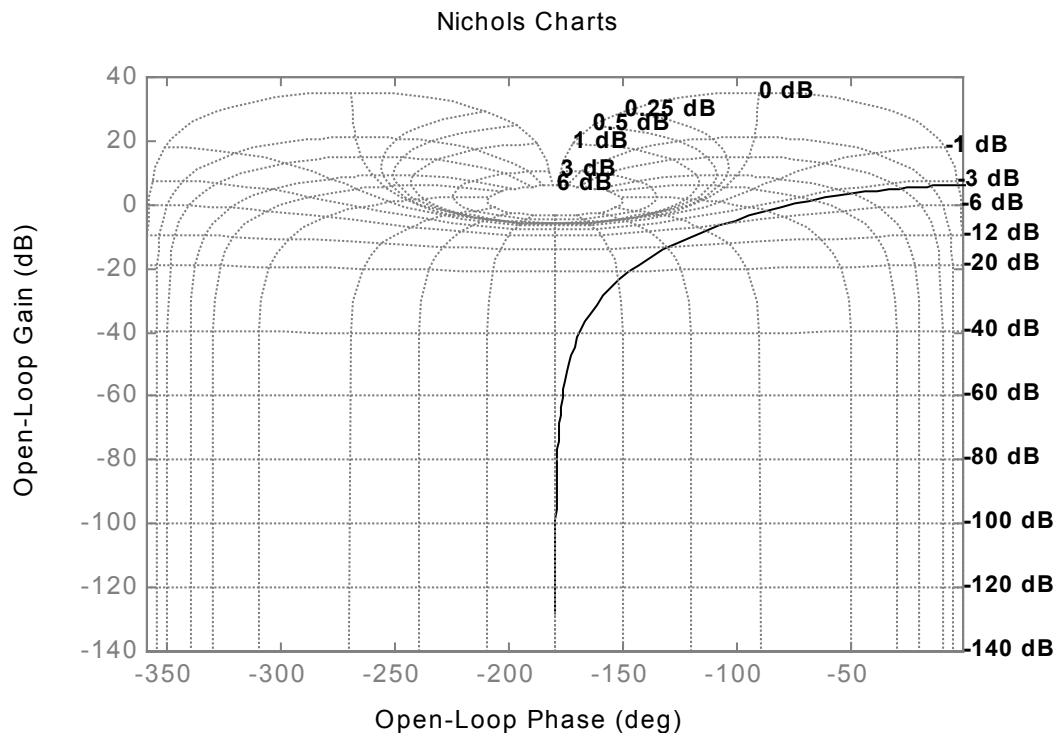
Obr. 75 : Graf amplitúdovej a fázovej charakteristiky

Pre sústavu s tým istým prenosom : 
$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2,5s^2 + 3s + 0,5}$$

je príklad príkazového súboru pre výpočet a zobrazenie Nicholsovho diagramu ([42], str. 286-289, atď.) uvedený na Obr. 76. Jeho grafické zobrazenie je na Obr. 77.

```
cit=[1]; % koeficienty polynómu čitateľa
men=[2.5 3 0.5]; % koeficienty polynómu menovateľa
nichols(cit,men,'k') % výpočet Nicholsovej charakteristiky
ngrid;
end
```

Obr. 76 : Príkazový súbor pre Nicholsovej charakteristiky



Obr. 77 : Nicholsova charakterisistika

**Príklad 25 :** Zostrojte logaritmickú frekvenčnú charakteristiku sústavy popísanej diferenciálnou rovnicou :

$$0,32 y'' + 0,36 y' + 0,5 y = u$$

Ide o sústavu s kmitavým priebehom, čo ľahko zistíme riešením tejto rovnice. Pri výpočte koreňov charakteristickej rovnice dostávame diskriminant menší ako nula, takže korene sú komplexne združené. Podľa prípadu d) na Obr. 71 má merítko chyby, súčiniteľ  $c$ , hodnotu  $c=0,45$ , teda nie je potrebné počítať presný priebeh frekvenčnej charakteristiky, ale stačí ju aproximovať. Potom frekvenčný prenos danej sústavy má tvar :

$$F(i\omega) = \frac{1}{-0,32\omega^2 + 0,36i\omega + 0,5}$$

Tento prenos upravme na tvar :

$$F(i\omega) = \frac{k}{T_2^2(i\omega)^2 + T_1i\omega + 1} = \frac{2}{-0,64\omega^2 + 0,72i\omega + 1}$$

Po zavedení substitúcie za  $1/T_2 = \omega_0$  a za  $T_1/T_2 = 2c$  a po predelení hodnotou  $T_2^2$  dostaneme :

$$F(i\omega) = \frac{\frac{k}{T_2^2}}{(i\omega)^2 + \frac{T_1}{T_2^2}i\omega + \frac{1}{T_2^2}} = \frac{k\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2c\omega_0\omega}$$

Pretože  $\omega_0 = 1/T_2 = 1/0,8 = 1,25$ ,  $c = T_1/(2T_2) = 0,72/(2 \cdot 0,8) = 0,45$ , potom platí :

$$F(i\omega) = \frac{3,12}{(1,56 - \omega^2) + 1,12i\omega}$$

Amplitúdová charakteristika bude daná vzťahom :

$$A = 20 \log|3,12| - 20 \log|(1,56 - \omega^2) + 1,12\omega|$$

a ďalej

$$A = 20 \log|3,12| - 20 \log \sqrt{(1,56 - \omega^2)^2 + 1,25\omega^2}$$

Dielčia amplitúdová charakteristika  $A_1$  má priebeh daný vzťahom :

$$A_1 = 20 \log 3,12 = 9,6 \text{ dB} ,$$

a je to priamka rovnobežná s osou frekvencie vo vzdialenosti 9,6 dB.

Amplitúdovú charakteristiku  $A_2$  zostrojíme z asymptôt :

pre  $\omega \rightarrow 0$  bude  $A_2 = -20 \log \sqrt{1,56^2} = -3,8 \text{ dB}$

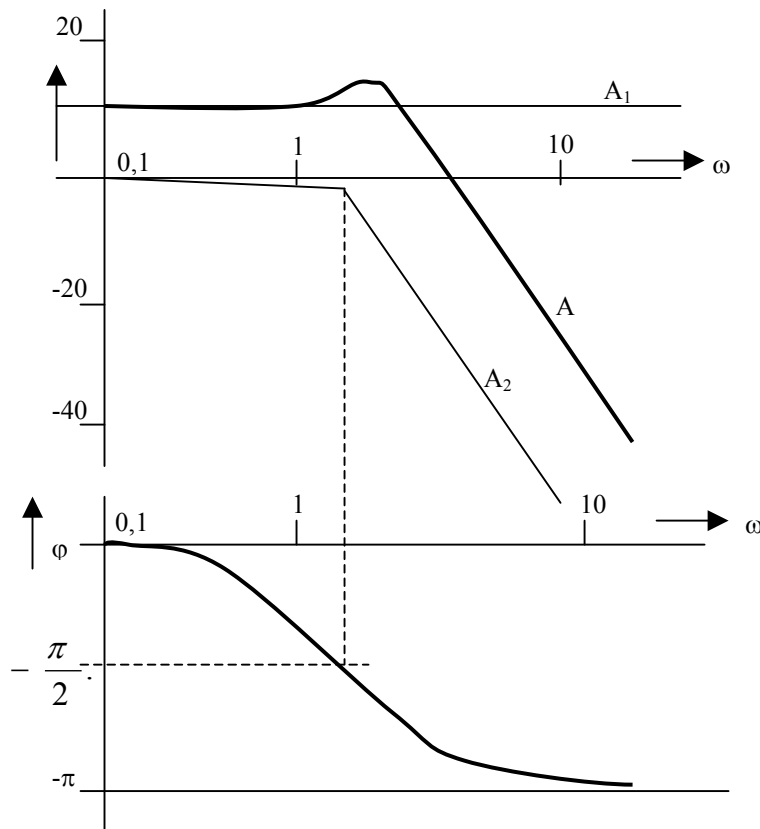
pre  $\omega \rightarrow \infty$  bude  $A_2 = -20 \log \sqrt{\omega^4 + 1,25\omega^2} = -20 \log \omega^2 = -40 \log \omega$

Prvá asymptota je rovnobežná s osou frekvencie vo vzdialenosti  $-3,8$  dB. Druhá asymptota má sklon  $-40$  dB/dek a jej polohu môžeme zistiť napr. :

pre  $\omega = 1$  je  $A_2 = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$

a pre  $\omega = 10$  je  $A_2 = -40 \log 10 = -40 \text{ dB}$

Priebeh amplitúdovej a fázovej charakteristiky je znázornený na nasledujúcom obrázku :



## 2.4 Regulované systavy a regulátory

Pod pojmom *regulovaná sústava* máme na mysli zariadenie, alebo jeho časť, v ktorom robíme reguláciu jednej, alebo viacerých regulovaných veličín. Je to vlastne objekt so svojimi vnútornými vlastnosťami, na ktoré sa z hľadiska regulácie snažíme vplývať tak, aby čo najlepšie splňovali naše požiadavky na jeho chovanie pri prenose cez neho prechádzajúcich signálov.

Ako je zrejmé z obrázkov Obr. 6, Obr. 12, Obr. 17 a najmä z Obr. 48 a Obr. 57, regulovaná sústava tvorí spolu s regulátorom regulačný obvod. Pritom pod pojmom *regulátor* myslíme zariadenie, pomocou ktorého uskutočňujeme reguláciu.

Do regulovanej sústavy, ako časti regulačného obvodu, vstupuje ako akčná veličina výstupná hodnota z regulátora  $u$  a poruchy  $z_1, z_2, \dots$  a vystupuje z nej regulovaná veličina  $y$ . Zmena regulovanej veličiny je potom vstupnou veličinou do regulátora, ktorého úlohou je túto zmenu, ako to uvidíme v ďalšom, spracovať po dynamickej stránke tak, aby jeho výstup ovplyvnil vstup do sústavy podľa požadovaných hodnôt regulovanej veličiny. Regulátor teda spôsobí zmeny regulovanej veličiny cez regulovanú sústavu, ktorá môže mať rôzne vnútorné vlastnosti. Podobne aj regulátor má okrem už spomínaných vlastností, na základe ktorých spracováva do neho vstupujúcu veličinu, aj svoje vlastné vnútorné vlastnosti, dané jeho prevedením. Všimnime si v ďalšom najprv niektoré základné typy a vlastnosti regulovaných sústav a neskôr aj vlastnosti regulátorov.

### 2.4.1 Základné typy a vlastnosti regulovaných sústav

V podkapitole 2.1 sme pre popis vlastností jednotlivých členov regulačného obvodu používali za určitých predpokladov diferenciálnu rovnicu v tvare :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (180)$$

teda aj s deriváciami vstupnej funkcie  $u(t)$ , alebo aj bez derivácií vstupnej funkcie :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (181)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  sú konštantné koeficienty,  $y(t)$  je výstupnou veličinou, ktorú máme určiť a riadiť,  $u(t)$  je vstupnou veličinou. Konkretizáciou tejto rovnice pre určité skutočné regulované systavy sme dostali pri zvolených formách vstupnej veličiny  $u(t)$  matematický opis (prenosovú diferenciálnu rovnicu) skúmaného člena (sústavy). Okrem matematického opisu môžeme usudzovať na vlastnosti regulovaných sústav aj podľa ich charakteristík (pozri podkapitola 2.3.2).

Uvedme si teraz niektoré často sa vyskytujúce základné typy regulovaných sústav, ktorých vlastnosti budeme posudzovať podľa :

- prenosu,
- prechodovej charakteristiky,
- komplexnej (Nyquistovej) frekvenčnej charakteristiky a podľa
- frekvenčných charakteristík znázornených v logaritmických súradniciach.

#### 2.4.1.1 Sústava s oneskorením nultého rádu

Je to tzv. *bezkapacitná* alebo *proporcionálna sústava*, ktorej prenosová diferenciálna rovnica má nasledujúci tvar :

$$a_0 y(t) = u(t) \quad (182)$$

odkiaľ

$$y(t) = \frac{1}{a_0} u(t) = Ku(t) \quad (183)$$

alebo

$$a_0 y(t) = b_0 u(t), \text{ odkiaľ } y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t).$$

Obrazový prenos sústavy popísanej diferenciálnou rovnicou (182), t.j. pomer Laplaceových obrazov výstupného a vstupného signálu :

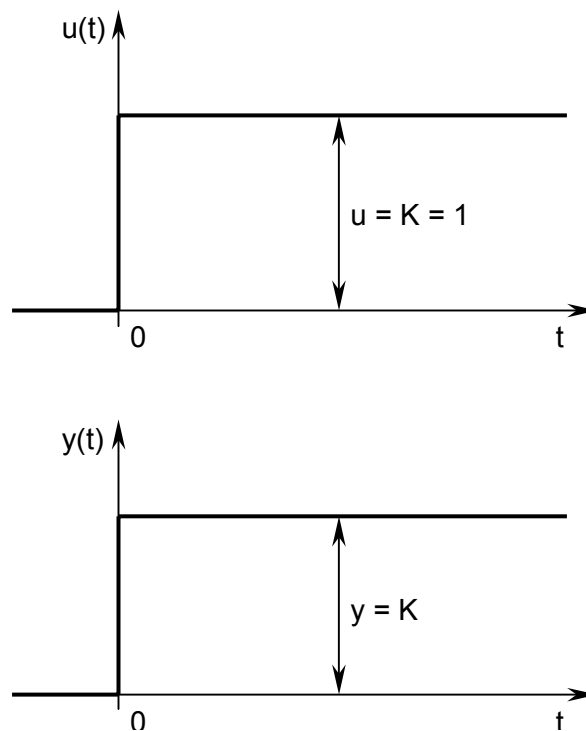
$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_0} = K \quad (184)$$

je konštantný, teda nezávislý od  $s$ . Frekvenčný prenos má tvar :

$$F(i\omega) = \frac{1}{a_0} = K, \quad (185)$$

je teda tiež nezávislý od frekvencie  $\omega$ .

Prechodová charakteristika (Obr. 78), ako odozva na jednotkový skok, je tiež skokovou funkciou s veľkosťou skoku rovnou  $K$ . Komplexná frekvenčná charakteristika, Nyquistova frekvenčná charakteristika, bude podľa vzťahu (185) redukovaná na bod s reálnou súradnicou  $K$  a s imaginárnou súradnicou nulovou (Obr. 79 a).



Obr. 78 : Prechodová charakteristika sústavy nultého rádu

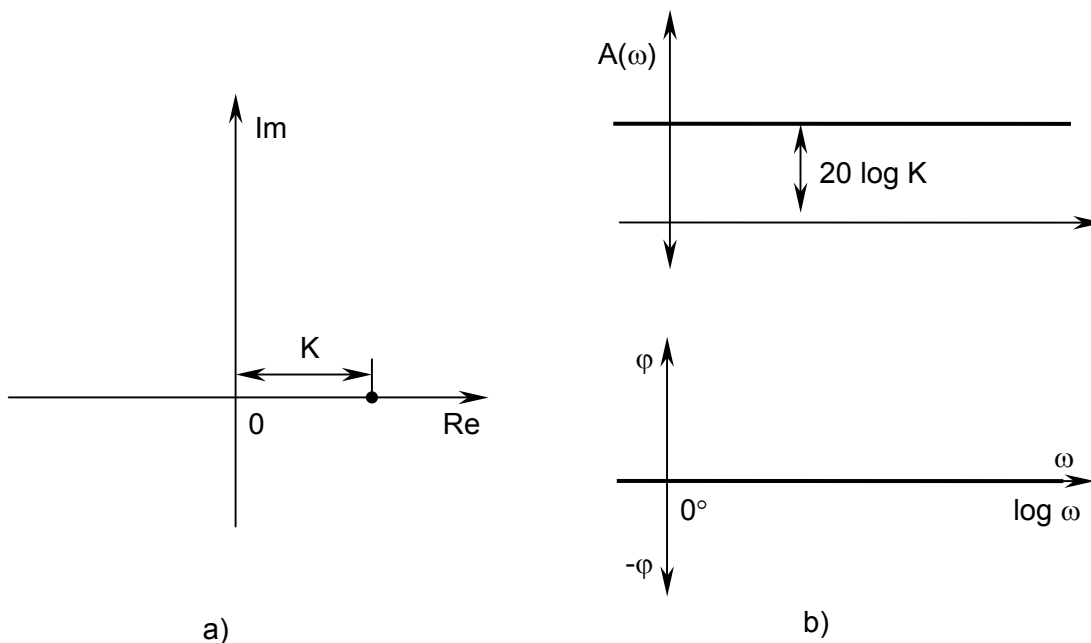
Pri znázornení frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach podľa vzťahov uvedených v podkapitole 2.3.2.3 bude jej amplitúda znázornená priamkou vo vzdialenosti :

$$20 \log F(i\omega) = A(\omega) = 20 \log K \quad \text{a so sklonom} \quad 0 \text{ dB / dek} \quad \text{a fáza } \varphi = 0^\circ,$$

ako je to zobrazené na Obr. 79 b.



S takýmto členom sa v regulačnej praxi často stretávame vo forme rôznych mechanických prevodov, odporových deličov, elektrických napätí na odbočkách transformátora apod. Pri presnejšom posudzovaní však zistíme, že vo väčšine prípadov ide o idealizované členy dosiahnuté napríklad zanedbávaním hodnôt v mechanických systémoch, trenia, zanedbávaním samoindukcie vinutí, atď., ktoré často môžeme v obmedzenom rozsahu linearizovať. Frekvenčný rozsah, v ktorom je táto idealizácia prípustná, je obmedzený a nemal by prevyšovať oblasť, v ktorej sa člen používa.



Obr. 79 : Frekvenčné charakteristiky sústavy nultého rádu

#### 2.4.1.2 Sústava s oneskorením nultého rádu s dopravným oneskorením

U sústav s dopravným oneskorením sa výstupná veličina začne meniť v závislosti od vstupnej veličiny až po uplynutí tzv. *dopravného oneskorenia (spozdenia)*  $t_d$ . Tento jav sa vyskytuje najmä pri regulácii prietoku kvapalín alebo pri doprave sypkých materiálov. Dopravné spozdenie veľmi sťažuje reguláciu [55], podobne ako kmitavé členy vyšších rádo. Dopravné oneskorenie sa môže uplatniť u ktoréhokoľvek dynamického člena. Ak obsahuje dynamický člen dopravné oneskorenie  $t_d$ , je účinok rovnaký, ako by sa o danú hodnotu  $t_d$  spozdžovala vstupná časová funkcia  $u(t)$ , preto na pravú stranu píšeme výraz  $u(t-t_d)$ . Teda prenosová diferenciálna rovnica sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením má nasledujúci tvar :

$$y(t) = K u(t - t_d) \tag{186}$$

Prechodová charakteristika takejto sústavy je znázornená na Obr. 80. Pre určenie prenosu použijeme poučku pre hľadanie Laplaceovho obrazu posunutej funkcie – posun v origináli, podkapitola 2.1.1, čiže platí  $u(t-t_d) \rightarrow U(s)e^{-st_d}$ . Po Laplaceovej transformácii predošlej rovnice potom dostaneme :

$$Y(s) = K U(s) e^{-st_d} , \tag{187}$$

odkiaľ pre Laplaceov obrazový prenos platí

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K e^{-st_d} . \tag{188}$$

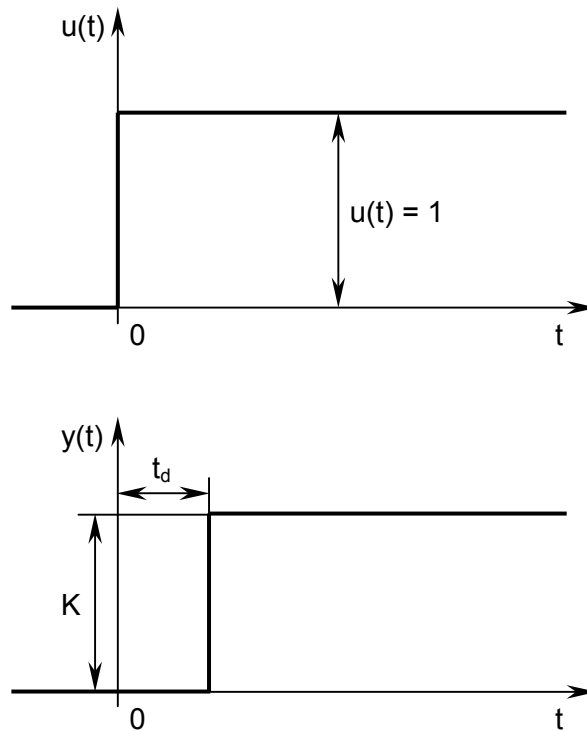
Frekvenčný prenos bude po dosadení  $s=i\omega$  mať tvar :

$$F(i\omega) = K e^{-i\omega t_d}, \quad (189)$$

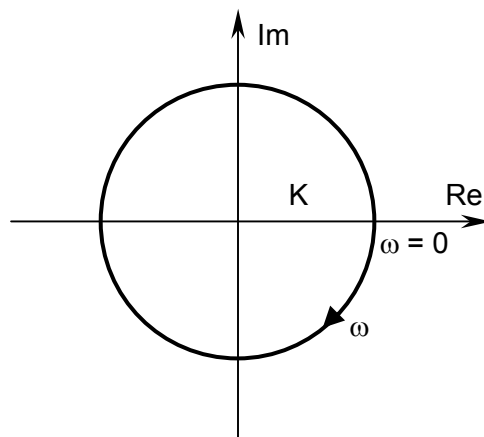
alebo po úprave podľa Eulerových vzťahov :

$$F(i\omega) = K (\cos(\omega t_d) - i \sin(\omega t_d)). \quad (190)$$

Z uvedených vzťahov teda vyplýva, že Nyquistova frekvenčná charakteristika je znázornená kružnicou s polomerom  $K$  so stredom v začiatku súradnicového systému (Obr. 81).



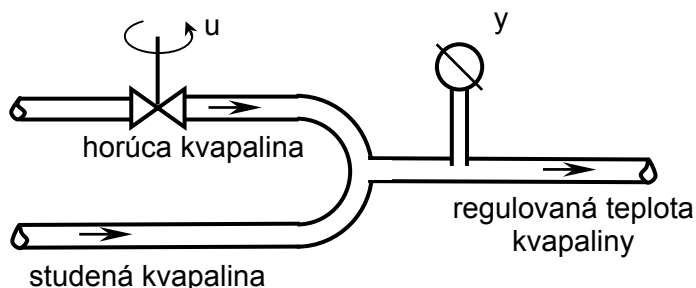
Obr. 80 : Prechodová charakteristika sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením



Obr. 81 : Frekvenčná charakteristika sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením

Logaritmická frekvenčná charakteristika proporčionalnej sústavy s dopravným oneskorením má rovnaký tvar ako bez dopravného oneskorenia na Obr. 79 b. Amplitúdová charakteristika je totožná a fázová už nemá len nulový posun, ale je posunutá od osi frekvencií o hodnotu  $\text{tg}(\omega t_d)$ .

Príklad statickej sústavy nultého rádu, u ktorej je konštrukcia príčinou dopravného oneskorenia, je uvedený na Obr. 82. Ide o reguláciu teploty kvapalného média zmenou množstva horúceho média miešaného s médiom studeným. Dopravné oneskorenie je dané vzdialenosťou meracieho miesta regulovanej veličiny a regulačného orgánu a rýchlosťou prúdenia.



Obr. 82 : Príklad sústavy nultého rádu s dopravným oneskorením

### 2.4.1.3 Statická sústava s oneskorením prvého rádu

Statická sústava s oneskorením prvého rádu, nazývaná často ako aperiodická sústava alebo zotrvačná sústava, je veľmi rozšírená. Je opísaná diferenciálnou rovnicou :

$$T_1 y'(t) + y(t) = K u(t), \quad (191)$$

pričom predpokladáme voči všeobecnej rovnici takú úpravu, aby pri  $y(t)$  bol koeficient  $a_0=1$ . Konštantu  $T_1$  nazývame časovou konštantou sústavy. Riešením tejto diferenciálnej rovnice pre jednotkový skok na vstupe dostaneme pri nulových počiatkových podmienkach prechodovú funkciu (riešenie diferenciálnej rovnice) v tvare :

$$y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad (192)$$

Jej grafické znázornenie (Obr. 83) je prechodová charakteristika, kde je vyznačený aj vzťah časovej konštanty k hodnote riešenia v danom čase. Časová konštantu  $T_1$  je doba, za ktorú by výstupná veličina dosiahla ustálenú hodnotu  $K$ , keby narastala počiatkovou (konštantnou) rýchlosťou. Ak hodnotu  $T_1$  dosadíme do riešenia, je možné určiť, že hodnota výstupnej veličiny v danom čase je v skutočnosti rovná približne 63% z hodnoty v ustálenom stave. Podobne by sa dala takáto hodnota stanoviť aj pre čas rovný  $2T_1$  alebo  $3T_1$ .

Laplaceov obrazový prenos a frekvenčný prenos tejto sústavy dostaneme z jej diferenciálnej rovnice v nasledujúcom tvare :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + T_1 s}, \quad (193)$$

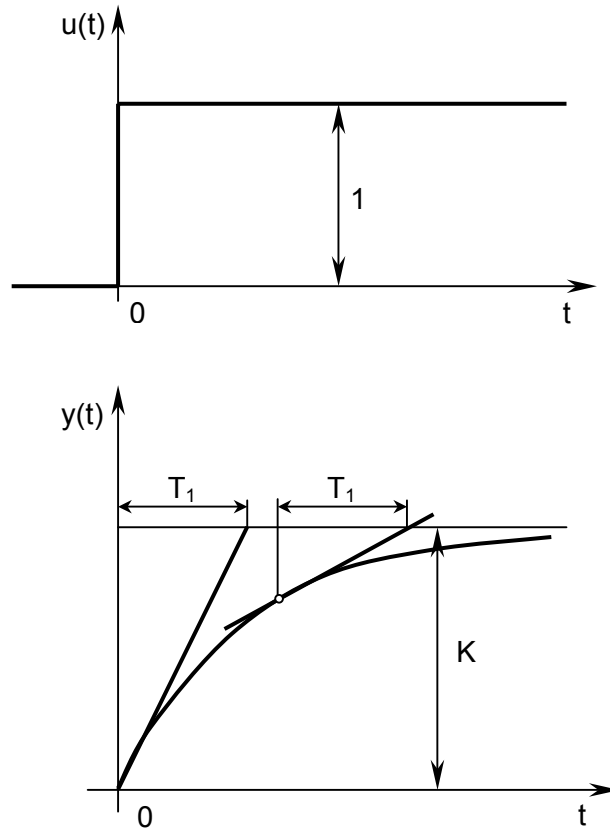
$$F(i\omega) = \frac{K}{1 + T_1(i\omega)}. \quad (194)$$

Nyquistova frekvenčná charakteristika je znázornenie frekvenčného prenosu pre frekvencie z intervalu  $0 \leq \omega \leq \infty$ , má tvar polkružnice s polomerom  $K/2$ , so stredom na kladnej reálnej osi pre  $\omega = 0$  a končí pre  $\omega = \infty$  v počiatku súradnicového systému. Pri znázornení frekvenčnej charakteristiky

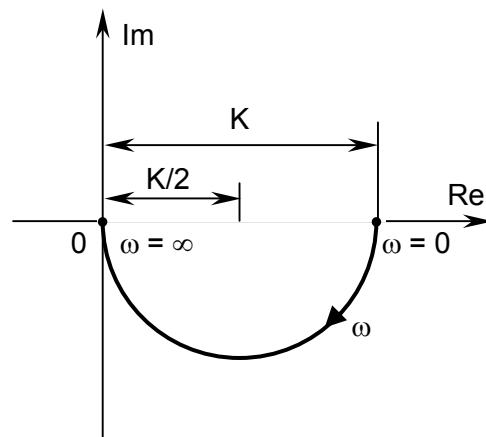
v logaritmických súradniciach dostaneme podľa už uvedeného postupu nasledujúce výrazy pre čiastkové amplitúdové charakteristiky a tiež pre fázovú charakteristiku :

$$20 \log F(i\omega) = A(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}, \quad \varphi = \arctg(-T_1 \omega),$$

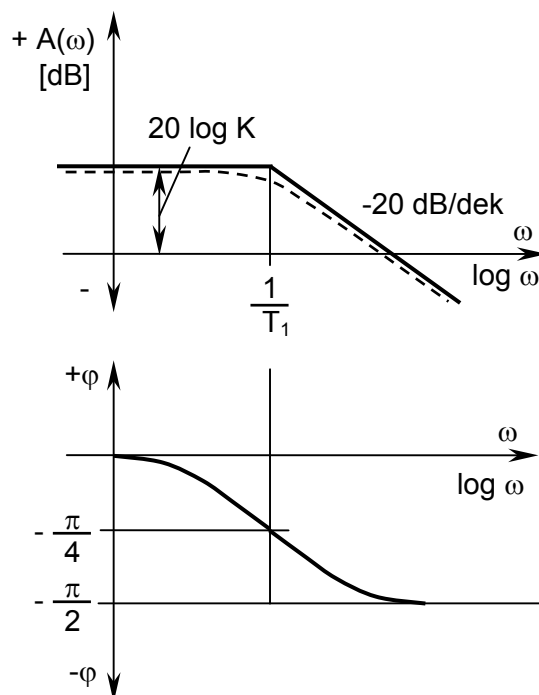
ktoré sú znázornené na Obr. 85.



Obr. 83 : Prechodová charakteristika sústavy prvého rádu



Obr. 84 : Nyquistova frekvenčná charakteristika sústavy prvého rádu



Obr. 85 : Logaritmická frekvenčná charakteristika sústavy prvého rádu

#### 2.4.1.4 Astatická sústava s oneskorením prvého rádu

Je to sústava, pri ktorej rýchlosť zmeny výstupnej veličiny je úmerná veľkosti vstupnej veličiny. Je opísaná diferenciálnou rovnicou s koeficientom  $a_0 = 0$  v nasledujúcom tvare :

$$T_i y'(t) = K u(t) \quad (195)$$

resp. pre  $K=1$  v tvare :

$$T_i y'(t) = u(t) \quad (196)$$

kde  $T_i$  je tzv. integračná časová konštanta. Výstupná veličina z tejto sústavy je úmerná integrálu vstupnej veličiny do sústavy. Riešením poslednej rovnice pre jednotkový skok ako vstupnú veličinu dostaneme prechodovú funkciu v tvare :

$$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t dt = \frac{t}{T_i} \quad (197)$$

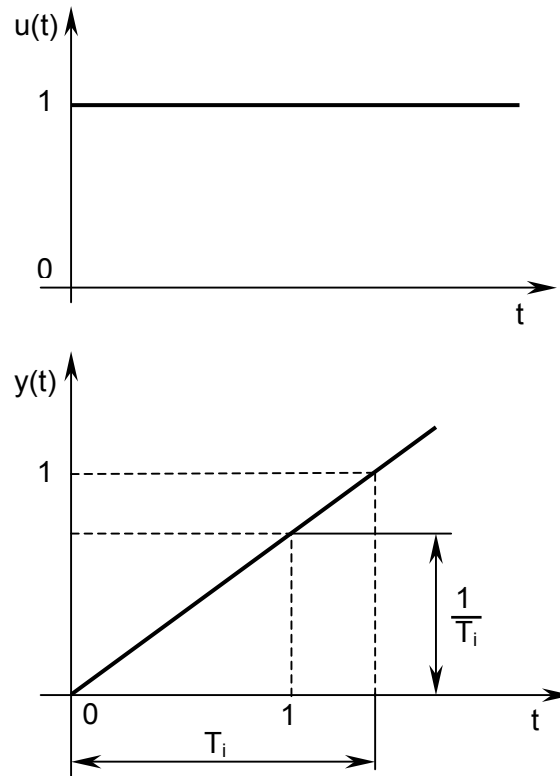
Jej grafické znázornenie (prechodová charakteristika) je priamka so smernicou  $1/T_i$  (Obr. 86). Obrazový a frekvenčný prenos majú tvar :

$$F(s) = \frac{1}{T_i s}, \quad (198)$$

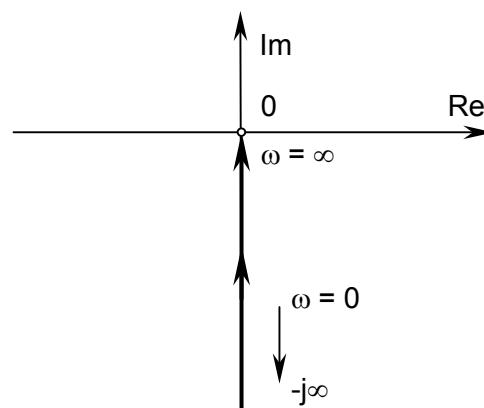
$$F(i\omega) = \frac{1}{T_i(i\omega)} = -i \frac{1}{\omega T_i}. \quad (199)$$

Frekvenčná charakteristika, ako to vyplýva z frekvenčného prenosu, je totožná so zápornou imaginárnou poloosou, pričom pre  $\omega \rightarrow 0$  je  $F(i\omega) \rightarrow -i\infty$ , a pre  $\omega \rightarrow \infty$  je  $F(i\omega) \rightarrow 0$  (Obr. 87). Pri znázorňovaní frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach podľa už uvedeného približného postupu dostaneme zobrazenie amplitúdy a fázy podľa Obr. 88.

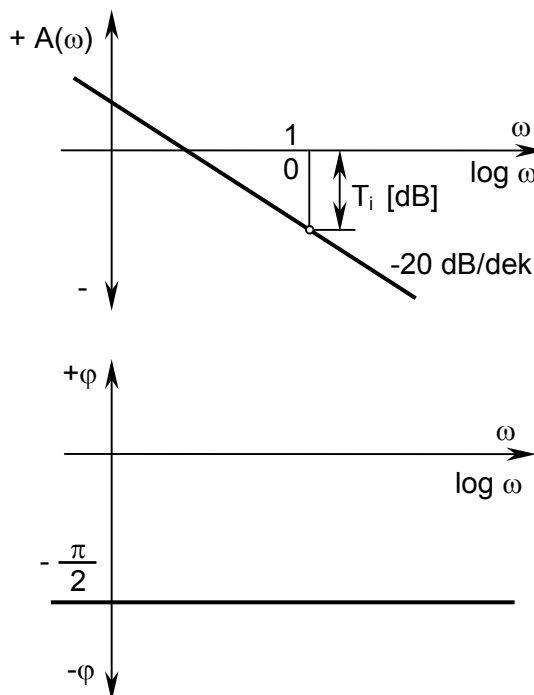
Príkladom astatickej sústavy prvého rádu môže byť cylindrická nádrž, podobná ako na Obr. 92, ale len s jedným konštantným prítokom ako vstupnou veličinou  $u(t)$  a výškou hladiny ako výstupnou veličinou  $y(t)$  a napríklad bez odtoku (alebo s odtokom v dne nádoby). Pri konštantnom prítoku je v intervale po naplnení nádrže výška hladiny lineárnou funkciou času.



Obr. 86 : Prechodová charakteristika astatickej sústavy prvého rádu



Obr. 87 : Nyquistova frekvenčná charakteristika astatickej sústavy prvého rádu



Obr. 88 : Logaritmická frekvenčná charakteristika astatickej sústavy prvého rádu

#### 2.4.1.5 Sústava s oneskorením prvého rádu s dopravným oneskorením

Takáto sústava je popísaná diferenciálnou rovnicou v tvare :

$$T_1 y'(t) + y(t) = u(t - t_d) \quad (200)$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice pre posunutý jednotkový skok na vstupe by sme dostali pri nulových počiatočných podmienkach prechodovú funkciu (riešenie diferenciálnej rovnice), ktorej grafické znázornenie, prechodová charakteristika, je na Obr. 89.

Prenos takéhoto člena (sústavy) stanovíme buď ako v predošlom z Laplaceovho obrazu diferenciálnej rovnice alebo jednoduchšie tak, keď prenos rozdelíme na dvoch členov zapojených do série, jeden ako prenos sústavy prvého rádu a druhý len s dopravným oneskorením. Pretože prenos sústavy prvého rádu má pre  $y(t) = K$  tvar :

$$F(s) = \frac{K}{1 + T_1 s}$$

a prenos dopravného oneskorenia je :

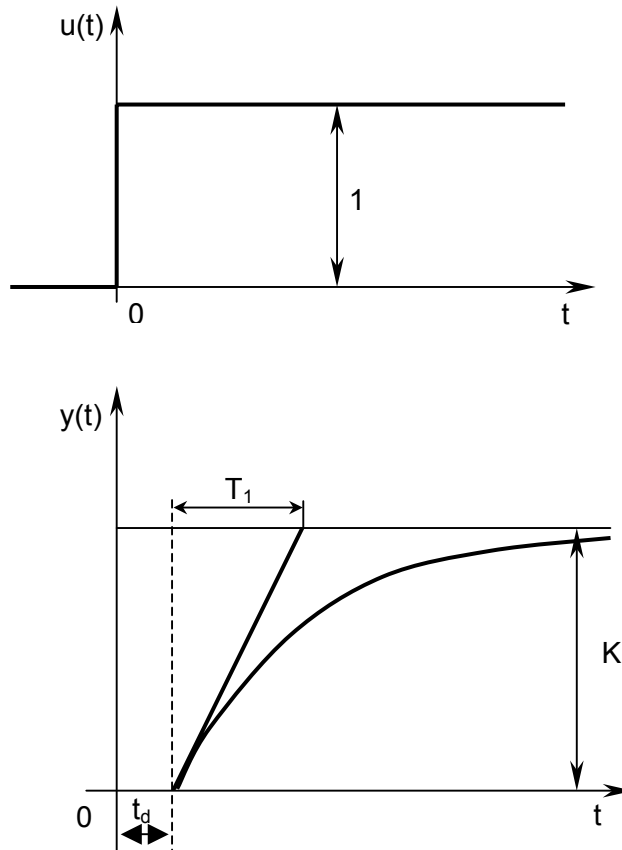
$$F_{t_d}(s) = e^{-st_d},$$

bude výsledný prenos v tvare :

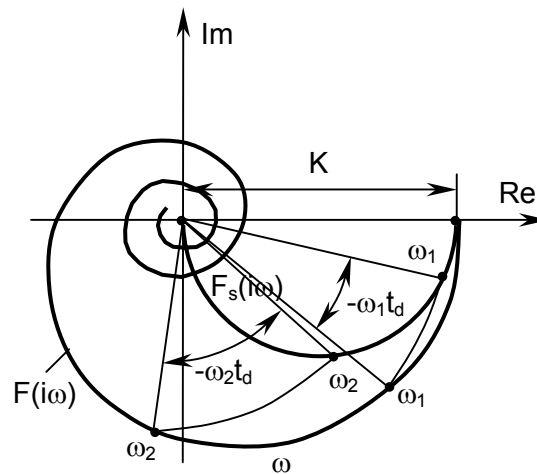
$$F(s) = \frac{K}{1 + T_1 s} e^{-st_d}. \quad (201)$$

Frekvenčný prenos má tvar :

$$F(i\omega) = \frac{K}{1 + T_1(i\omega)} e^{-i\omega t_d} = F_s(i\omega) \cdot F_{t_d}(i\omega) \quad (202)$$



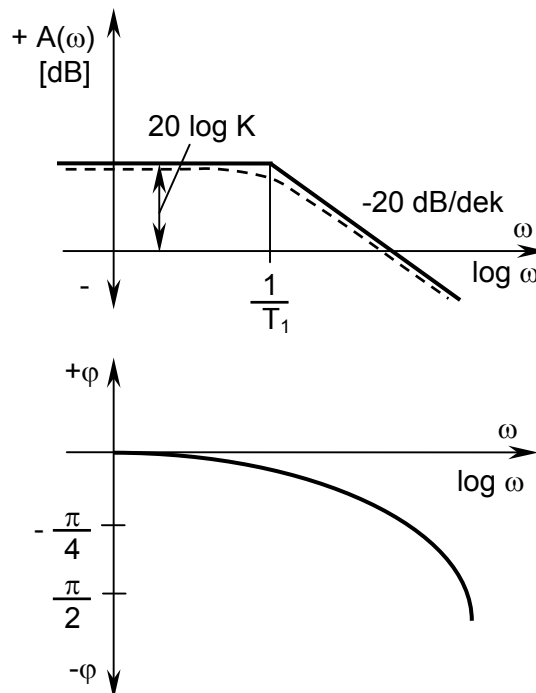
Obr. 89 : Prechodová charakteristika sústavy prvého rádu s dopravným oneskorením



Obr. 90 : Nyquistova fr. charakteristika sústavy 1. rádu s dopravným oneskorením

Nyquistova frekvenčná charakteristika sústavy prvého rádu s dopravným oneskorením (Obr. 90) je nekonečná špirála, lebo vplyvom dopravného oneskorenia  $t_d$  sa fázový uhol  $\varphi$  zvyšuje ešte o hodnotu  $\omega t_d$ , ktorá je daná dopravným spozdením. Logaritmická frekvenčná charakteristika takejto sústavy je na Obr. 91. Amplitúdová charakteristika sa vplyvom dopravného oneskorenia nemení. K pôvodnej fáze  $\varphi$  však aj tu musíme na každej frekvencii pripočítať uhol podľa  $\omega t_d$ , ktorý je daný dopravným spozdením.

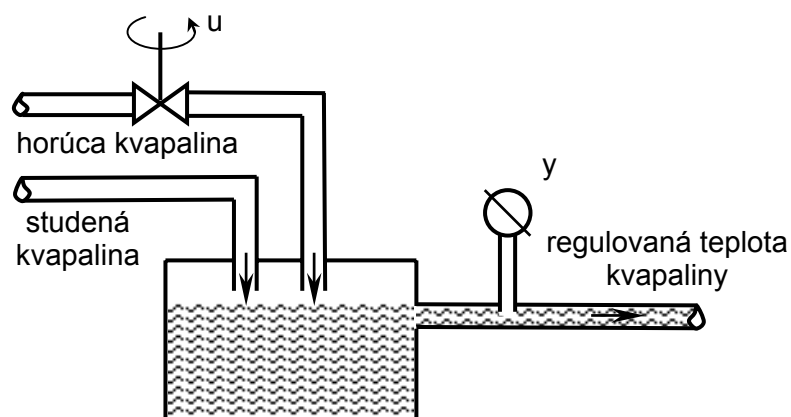




Obr. 91 : Logaritmická fr. charakteristika sústavy 1. rádu s dopravným oneskorením

Dopravné oneskorenie je v regulačných obvodoch nežiadúce, a preto sa ho snažíme úplne vylúčiť, alebo aspoň zmenšiť na minimum.

Pre statickú sústavu prvého rádu s dopravným oneskorením je príklad na Obr. 92. Ide o reguláciu teploty kvapaliny miešaním studenej a teplej kvapaliny v nádrži. Dopravné oneskorenie je aj tu dané vzdialenosťou meracieho miesta regulovanej veličiny a regulačného orgánu, pričom sa navyše prejavuje aj kapacita nádrže (jednkapacitná sústava).



Obr. 92 : Príklad sústavy prvého rádu s dopravným oneskorením

Ako sme videli v predošlých dvoch prípadoch, pre regulované sústavy s dopravným oneskorením môžeme Laplaceov obrazový prenos vyjadriť všeobecne v tvare :

$$F_s(s) = \frac{K}{s^r \sum_{i=1}^{n-r} (1 + T_i s)} e^{-t_d s}, \quad (203)$$

kde  $t_d > 0$  je časová konštanta dopravného oneskorenia. Zlomok vyjadruje prenos sústavy bez dopravného oneskorenia a časť za zlomkom vyjadruje prenos dopravného oneskorenia. Ako už bolo povedané, príčinou dopravného oneskorenia je buď konštrukcia sústavy alebo spojovacia cesta medzi regulátorom a sústavou.

#### 2.4.1.6 Sústava s oneskorením druhého rádu

Takáto sústava môže vzniknúť jednak sériovým spojením dvoch sústav s oneskorením prvého rádu (statických), jednak na základe v sústave sa vyskytujúcich členov, ktorých chovanie je úmerné druhej derivácii výstupnej veličiny. Ide tu o sústavy, v ktorých nemôžeme zanedbať rôzne zotrvačné členy, indukčnosti, apod. Charakteristická rovnica takejto sústavy s oneskorením druhého rádu má potom jeden pár komplexne združených koreňov (ak neuvažujeme jej vznik na základe sériového spojenia dvoch sústav s oneskorením 1-vého rádu, kedy má reálne korene).

Opisujúca diferenciálna rovnica sa používa najmä v týchto tvaroch :

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = K u(t), \quad (204)$$

$$T^2 y''(t) + 2cT y'(t) + y(t) = K u(t), \quad (205)$$

$$y''(t) + 2c\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 K u(t), \quad (206)$$

kde  $T = \sqrt{a_2}$  je časová konštanta,  $c = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$  je pomerný koeficient útlmu a  $\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$  je uhlová

rýchlosť *vlastných kmitov* kmitavého člena alebo pri  $c=1$  *prírodná frekvencia* netlmeného člena. Je prevrátenou hodnotou časovej konštanty  $T$ , takže  $T$  udáva dobu kmitu netlmeného kmitavého článku. Diferenciálnu rovnicu sme znovu upravili tak, aby platilo, že koeficient  $a_0=1$ .

Aby sústava druhého rádu, opísaná niektorou z predošlých troch diferenciálnych rovníc bola kmitavou sústavou, musí byť diskriminant jej charakteristickej rovnice menší ako nula. To sa splní, ak platí  $a_1^2 < 4a_2$ , resp. ak  $c < 1$ . Potom korene charakteristickej rovnice budú :

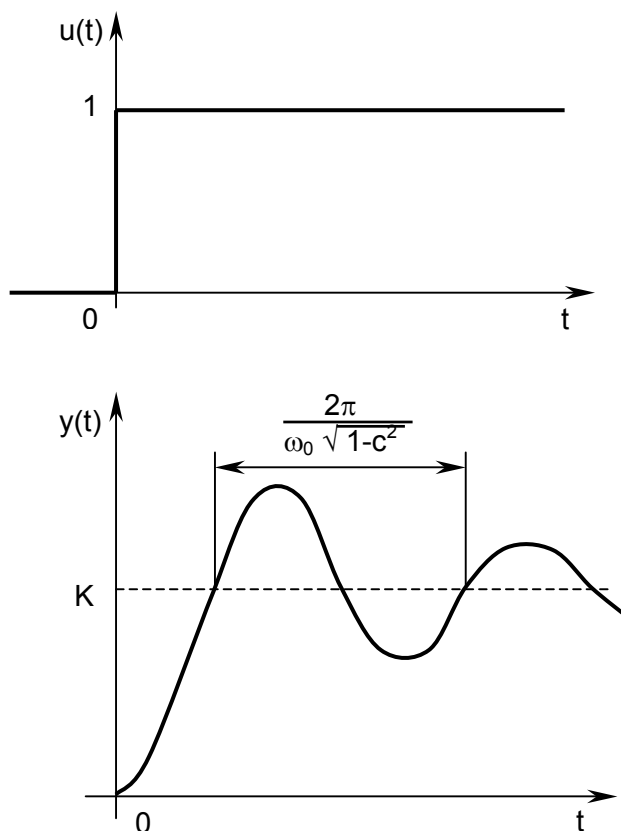
$$s_{1,2} = \frac{1}{T} \left[ -c \pm i\sqrt{1-c^2} \right] = -\omega_0 \cdot c \pm i\omega_0 \sqrt{1-c^2}$$

Prechodovú funkciu dostaneme riešením diferenciálnej rovnice pre jednotkový skok na vstupe a pri nulových počiatkových podmienkach :

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{c}{T}t}}{\sqrt{1-c^2}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-c^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \right) \right] = \quad (207)$$

$$K \left[ 1 - \frac{e^{-\omega_0 c t}}{\sqrt{1-c^2}} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1-c^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} \right) \right].$$

Za predpokladu, že  $\omega_0 \cdot c > 0$  vidíme, že prechodová charakteristika znázornená na Obr. 93 má tlmený kmitavý priebeh s uhlovou rýchlosťou  $\omega_0 = \sqrt{1-c^2}$ , resp. s periódou  $2\pi / \omega_0 \cdot \sqrt{1-c^2}$ .



Obr. 93 : Prechodová charakteristika kmitavej sústavy druhého rádu

Obrazový a frekvenčný prenos kmitavej sústavy z naznačenej diferenciálnej rovnice je :

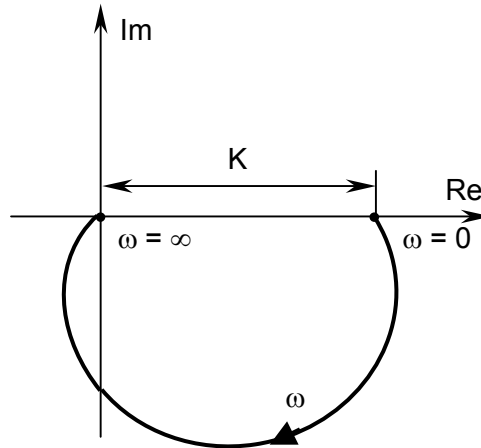
$$F(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2cTs + 1} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2c\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (208)$$

resp. :

$$F(i\omega) = \frac{K}{(1 - \omega^2 T^2) + i2cT\omega} = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2c\omega_0\omega}. \quad (209)$$

Nyquistova frekvenčná charakteristika, znázornená na Obr. 94, bude začínať pre  $\omega = 0$  na kladnej reálnej osi vo vzdialenosti K od počiatku a prechádza dvoma kvadrantami (sústava druhého rádu) v zápornom zmysle. Dĺžka sprievodiča sa spočiatku až do kritickej frekvencie  $\omega = \omega_0$  zväčšuje a potom pre  $\omega \rightarrow \infty$  klesá k nule.

Grafické znázornenie takejto frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach, napr. ako je na Obr. 75, by sme zostrojili jednoducho pomocou príkazov na Obr. 74.



Obr. 94 : Nyquistova frekvenčná charakteristika kmitavej sústavy druhého rádu

Keď sústava druhého rádu vznikne sériovým spojením dvoch sústav prvého rádu s časovými konštantami  $T_1$  a  $T_2$ , potom jej diferenciálnu rovnicu môžeme vyjadriť v tvare :

$$T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = K u(t), \quad (210)$$

Ak budú korene jej charakteristickej rovnice reálne rôzne a záporné, bude pri skokovej zmene  $u(t)=K$  riešenie uvedenej diferenciálnej rovnice mať tvar :

$$y(t) = K \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad (211)$$

a grafické znázornenie (prechodová charakteristika) napr. pre  $K=1$ , je na Obr. 100 na strane 130.

Ako už bolo uvedené v časti 2.3.2.1 (spolu aj s postupom výpočtu), pri takýchto prechodových charakteristikách (Obr. 93, Obr. 100) rozoznáme nasledujúce charakteristické hodnoty :

- $T_u$  - dobu priet'ahu,
- $T_n$  - dobu nábehu,
- $T_p$  - dobu prechodu.

Podľa opisujúcej diferenciálnej rovnice alebo podľa tvaru prechodovej charakteristiky sa sústavy delia na sústavy prvého, druhého rádu a sústavy vyšších rádov, sústavy s dopravným oneskorením, sústavy statické alebo astatické. Statické regulované sústavy vyšších rádov je možné opísať náhradnou diferenciálnou rovnicou a prechodovou charakteristikou druhého rádu. Metódy určovania zosilnenia regulovanej sústavy a jej časových konštant budú uvedené v nasledujúcej kapitole. Na základe praktických poznatkov delíme sústavy podľa hodnôt  $T_u$ ,  $T_p$ ,  $T_n$  na :

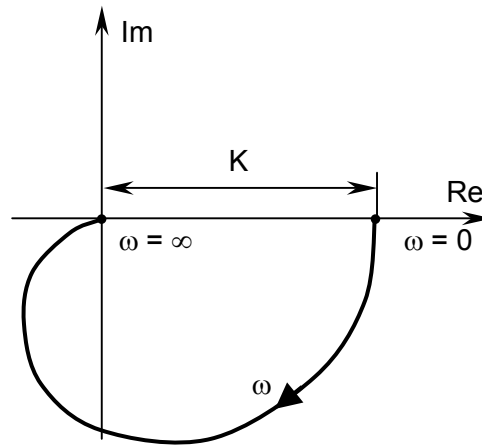
- $T_u/T_n \leq 0,10$  - dobre regulovateľné,
- $T_u/T_n \cong 0,17$  - ešte regulovateľné,
- $T_u/T_n \geq 0,33$  - ťažko regulovateľné.

Pre obrazový a frekvenčný prenos platí :

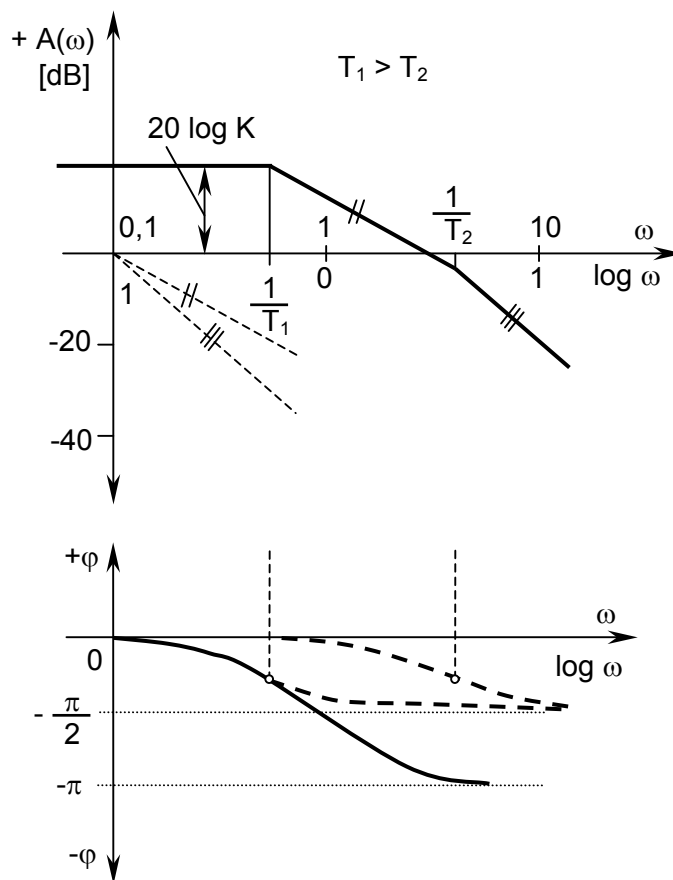
$$F(s) = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1}, \quad (212)$$

$$F(i\omega) = \frac{K}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + i(T_1 + T_2)\omega}, \quad (213)$$

Nyquistova frekvenčná charakteristika takejto nekmitavej sústavy druhého rádu pre frekvencie  $0 \leq \omega \leq \infty$  je zobrazená na Obr. 95.



Obr. 95 : Nyquistova frekvenčná charakteristika nekmitavej sústavy druhého rádu



Obr. 96 : Logaritmickej frekvenčná charakteristika nekmitavej sústavy druhého rádu

Pre znázornenie frekvenčnej charakteristiky v logaritmickej súradniciach upravíme frekvenčný prenos na tvar :

$$F(i\omega) = \frac{K}{(T_1 i\omega + 1)(T_2 i\omega + 1)}, \quad (214)$$

takže po zlogaritmovaní dostaneme pre  $T_1 > T_2$  :

$$20 \log F(i\omega) = 20 \log K - 20 \log(T_1 i\omega + 1) - 20 \log(T_2 i\omega + 1)$$

a podľa už známych postupov je znázornená amplitúdová aj fázová charakteristiku na Obr. 96.

Ďalšie typy a vlastnosti dynamických sústav, ako napríklad derivačná sústava a rôzne kombinácie základných typov sústav uvidíme pri analýze regulátorov a pri analýze vplyvu regulátorov na regulované sústavy.

## 2.4.2 Metódy identifikácie regulovaných sústav

Pod pojmom *identifikácia* regulovaných sústav rozumieme vyšetrenie ich statických a tiež dynamických vlastností, vyjadrených *matematickým popisom – matematickým modelom*. Ide teda vlastne o analýzu regulovaných sústav. Túto analýzu môžeme robiť v zásade dvojakým spôsobom :

- fyzikálno - matematickou analýzou identifikovanej sústavy (deduktívna metóda),
- experimentálnou analýzou identifikovanej sústavy (induktívna metóda).

*Fyzikálno – matematická analýza* spočíva v rozložení identifikovanej regulovanej sústavy na jednotlivé časti (prvky) a v popise fyzikálnych dejov v nich prebiehajúcich, ako to bolo uvedené napríklad v podkapitole 2.1.2 a 2.1.3. Pritom sa spravidla zavádzajú určité zjednodušujúce predpoklady a zložité vzťahy sa aproximujú jednoduchšími. Výsledný matematický popis preto len zhruba, ale väčšinou postačujúco, vystihuje skutočné deje prebiehajúce v sledovanej sústave.

*Experimentálna analýza* je podmienená meraním vstupných a výstupných signálov priamo v prevádzke, alebo na zvlášť k tomu určených pracoviskách. Časový priebeh týchto signálov sa vyhodnocuje a slúži na posúdenie dynamických vlastností príslušnej regulovanej sústavy. Experimentálnu analýzu je možné robiť viacerými spôsobmi, danými charakterom spracovaných signálov, napr. :

1. Vyhodnocovaním prechodových charakteristík.
2. Vyhodnocovaním frekvenčných charakteristík.
3. Vyhodnocovaním signálov všeobecných tvarov.
4. Vyhodnocovaním náhodných signálov.

Pretože v technickej praxi sa najčastejšie posudzujú dynamické vlastnosti sústav podľa odozvy na jednoznačne definovaný vstupný signál, pričom zvláštny význam nadobudol vstupný signál v tvare skoku, ukážeme si v ďalšom niektoré metódy posudzovania dynamických vlastností podľa prechodových charakteristík sústav.

Pri vyhodnocovaní prechodových charakteristík sa vychádza z toho, že meraním zistíme odozvu  $y(t)$  regulovanej sústavy na skokovú zmenu vstupného signálu  $u(t)$  o známej veľkosti. Regulovaná sústava musí byť pred zmenou vstupného signálu v ustálenom stave. Inak by sa v odozve prejavili okrem zavedeného vstupného signálu aj iné vplyvy a keď do regulovanej sústavy vstupuje viac signálov, musia byť počas merania udržiavané na stálej hodnote.

Účelné je dané meranie viackrát opakovať a pre vyhodnotenie brať stredný pravdepodobný priebeh prechodovej charakteristiky, alebo vyhodnotiť všetky priebehy prechodových charakteristík a z jednotlivých výsledkov určiť stredné pravdepodobné hodnoty hľadaných konštánt.

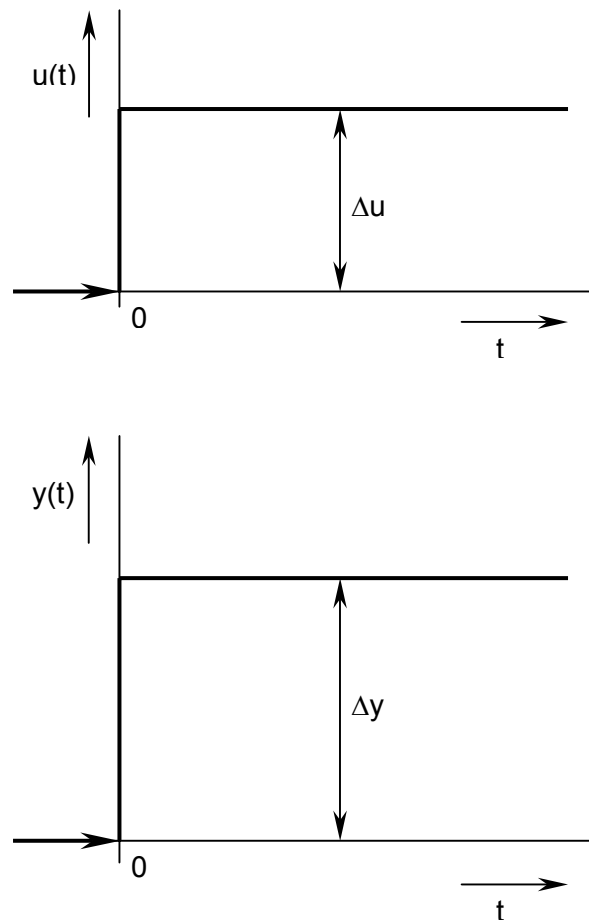
Výhoda vyhodnocovania prechodových charakteristík je v tom, že pre zisťovanie ich priebehu vystačíme s pomerne jednoduchým zariadením.

a) *Sústava nultého rádu*

Ako už vieme z podkapitoly 2.4.1.1, sústavu nultého rádu je možné s dostatočnou presnosťou popísať nasledujúcou rovnicou :

$$y(t) = Ku(t), \quad (215)$$

a grafické zobrazenie odozvy je uvedené na Obr. 97.



Obr. 97 : Určenie zosilnenia sústavy nultého rádu

V tomto prípade predstavuje sústava dynamický člen bez oneskorenia a určenie parametra sústavy, jej zosilnenia, je triviálne. Stanoví sa pomerom rozdielov ustálených stavov :

$$K = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad (216)$$

b) *Sústava prvého rádu*

Veľmi často sa vyskytujú tzv. jednodobové sústavy, ktoré je možné popísať diferenciálnou rovnicou v nasledujúcom tvare :

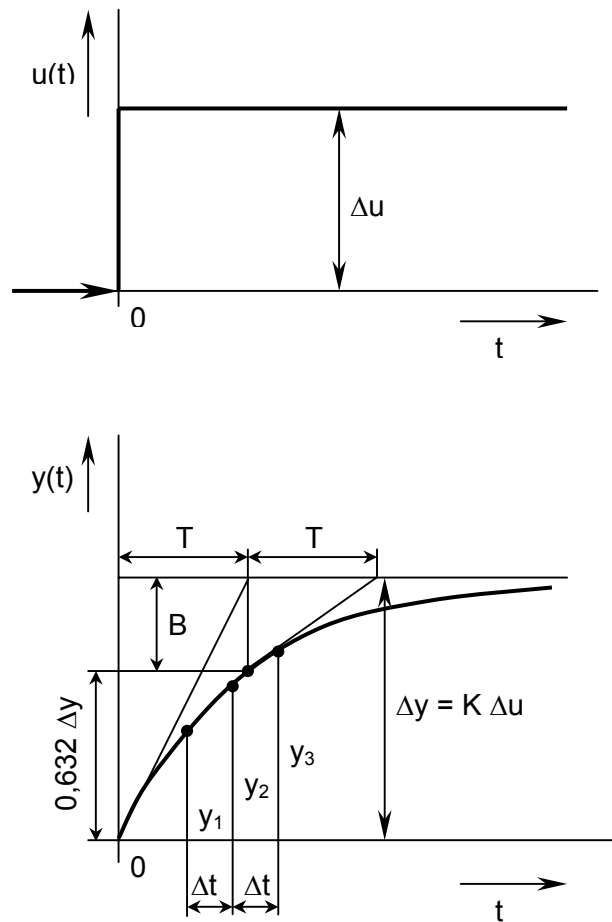
$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t), \quad (217)$$

Riešenie takejto diferenciálnej rovnice pri skokovej zmene vstupnej veličiny o hodnote  $\Delta u$  bude :

$$y(t) = K \Delta u (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (218)$$

kde podľa Obr. 98 platí :

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad (219)$$



Obr. 98 : Určenie zosilnenia a časových konštánt sústavy prvého rádu

Časovú konštantu  $T$  môžeme u takejto sústavy určiť nasledujúcim spôsobom. Najprv do riešenia diferenciálnej rovnice dosadíme  $t = T$ , odkiaľ potom dostaneme :

$$y(t) = K \Delta u (1 - e^{-1}) = 0,632 K \Delta u = 0,632 \Delta y .$$

Teda pre hodnotu  $0,632\Delta y$  bude časová konštantu  $T$  daná vzťahom :

$$T = \frac{B}{\Delta u K} . \quad (220)$$

S ohľadom na chyby, ktorých sa pri meraní prechodovej charakteristiky vyšetrovanej sústavy dopúšťame, je lepšie postupovať pri určovaní časovej konštanty tak, aby sa na stanovovaní jej veľkosti podieľal väčší



úsek prechodovej charakteristiky a nie iba jej jeden bod. To je možné urobiť pomocou subtangent pre viac bodov prechodovej charakteristiky, pričom výslednú časovú konštantu dostaneme, ako aritmetický priemer jednotlivých hodnôt, teda :

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}. \quad (221)$$

Pretože grafické stanovenie dotyčníc v jednotlivých bodoch nameranej prechodovej charakteristiky je málo presné, používa sa tiež metóda určujúca veľkosť časovej konštanty  $T$  z jej polčasu  $P$ . Polčas  $P$  takejto prechodovej charakteristiky je definovaný ako doba, za ktorú dosiahne výstupná veličina z meranej sústavy polovičnú hodnotu konečného ustáleného stavu :

$$y(t) = \frac{K \Delta u}{2}. \quad (222)$$

Potom z riešenia diferenciálnej rovnice dostaneme :

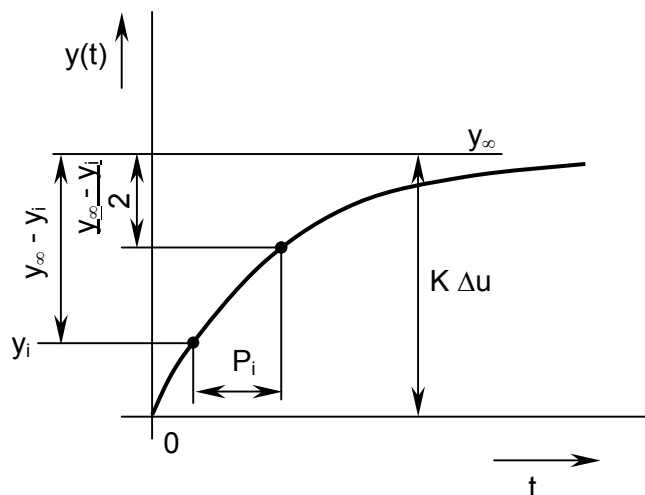
$$\frac{K \cdot \Delta u}{2} = K \cdot \Delta u \left( 1 - e^{-\frac{P}{T}} \right),$$

odkiaľ dostaneme :

$$e^{-\frac{P}{T}} - \frac{1}{2} = 0,$$

z čoho platí  $P = 0,693 T$ .

Určenie doby polčasu  $P$  je možné urobiť podstatne presnejšie znovu ako aritmetický priemer z viacerých hodnôt polčasov  $P_i$  odmeranej prechodovej charakteristiky. Postup je zřejmý z nasledujúceho obrázku :



Obr. 99 : Určenie doby polčasu sústavy prvého rádu

Na nameranej prechodovej charakteristike si vhodne zvolíme niekoľko bodov  $y_i$ , pre ktoré stanovíme hodnoty  $(y_\infty - y_i)/2$ . Tieto nám na prechodovej charakteristike vytknú body, z ktorých určíme hodnoty  $P_i$ . Výslednú dobu polčasu  $P$  dostaneme zo vzťahu :

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}. \quad (223)$$

Výslednú časovú konštantu  $T$  určíme podľa už uvedenej závislosti  $P = 0,693 T$ , odkiaľ platí  $T = P / 0,693$ . Často sa tiež určuje veľkosť časovej konštanty pomocou nasledujúceho vzťahu :

$$T = \frac{\Delta t}{\ln \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}}, \quad (224)$$

kde sú hodnoty  $y_1, y_2, y_3$  odčítané pre ekvidistantne vzdialené hodnoty času  $\Delta t$  na príslušnej prechodovej charakteristike v dostatočnej vzdialenosti od jej počiatku a od jej ustáleného stavu (Obr. 98).

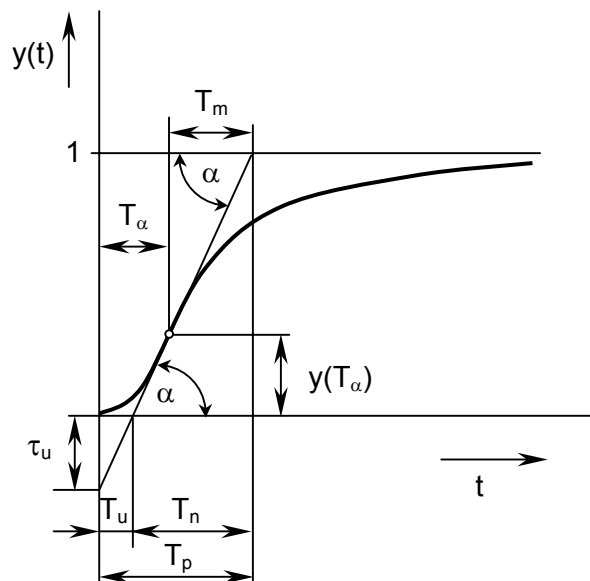
c) *Sústava druhého rádu*

Sériovým spojením dvoch sústav prvého rádu (viď podkapitola 2.4.1.6), dostaneme sústavu druhého rádu. Jej diferenciálnu rovnicu môžeme vyjadriť v tvare :

$$T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = u(t). \quad (225)$$

Korene jej charakteristickej rovnice budú reálne rôzne, záporné. Prechodová charakteristika bude mať tvar podľa Obr. 100 a môžeme ju vyjadriť pre  $u(t) = K = 1$  nasledujúcou rovnicou :

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (226)$$



Obr. 100 : Určenie časových konštant sústavy druhého rádu

Našou úlohou je určenie časových konštant  $T_1$  a  $T_2$  nameranej prechodovej charakteristiky, ako funkcie parametrov  $T_m$  a  $T_n$ , ktoré môžeme z nej odčítať, ak v jej inflexnom bode vedieme dotyčnicu. Po derivovaní rovnice prechodovej charakteristiky dostaneme výrazy :

$$y'(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}},$$

a

$$y''(t) = \frac{1}{T_2(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{T_1(T_1 - T_2)} e^{-\frac{t}{T_1}},$$

Inflexný bod prechodovej charakteristiky nastane pri  $y'(T_\alpha) = 0$ , takže jeho súradnicu môžeme určiť nasledovne :

$$\frac{1}{T_1 - T_2} \left( \frac{1}{T_2} e^{-\frac{T_\alpha}{T_2}} - \frac{1}{T_1} e^{-\frac{T_\alpha}{T_1}} \right) = 0, \quad \frac{T_1}{T_2} e^{T_\alpha \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)} = 1, \quad T_\alpha \frac{T_2 - T_1}{T_1 \cdot T_2} = \ln \frac{T_2}{T_1},$$

odkiaľ potom dostaneme :

$$T_\alpha = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{alebo} \quad T_\alpha = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2} \cdot \ln \frac{T_1}{T_2} \quad (227)$$

Súradnicu závislej premennej inflexného bodu  $y(T_\alpha)$  dostaneme dosadením výrazu časovej súradnice inflexného  $T_\alpha$  do rovnice prechodovej charakteristiky :

$$\begin{aligned} y(T_\alpha) &= 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{T_\alpha}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{T_\alpha}{T_2}} = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{T_2 - T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}} = \\ &= 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\left( \frac{T_1}{T_2 - T_1} + 1 \right)} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{T_1}{T_2 - T_1}} = \\ &= 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left[ T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1} - T_2 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{T_1}{T_2 - T_1}} \right] = 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_1}{T_1 - T_2}}, \end{aligned}$$

odkiaľ dostaneme :

$$y(T_\alpha) = 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_1}{T_1 - T_2}}. \quad (228)$$

Zavedením pomeru  $\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$  dostaneme :

$$\frac{T_\alpha}{T_1} = \frac{\tau_2}{\tau_2 - 1} \cdot \ln \tau_2$$

a pre  $y(T_\alpha)$  potom platí :

$$y(T_\alpha) = 1 - \frac{1 + \tau_2}{\tau_2} \cdot \tau_2^{1 - \tau_2}. \quad (229)$$

Dobu nábehu  $T_n$  môžeme stanoviť pomocou smernice dotyčnice v inflexnom bode (Obr. 100) a podľa vzťahu pre prvú deriváciu rovnice prechodovej charakteristiky v jej inflexnom bode :

$$y'(T_\alpha) = \frac{1}{T_n}, \quad y'(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}},$$

platí :

$$\begin{aligned}
 y'(T_\alpha) &= \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{T_\alpha}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{T_\alpha}{T_2}} = \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \left( e^{-\frac{T_2 - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} \frac{T_2}{T_1}} - e^{-\frac{T_1 - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} \frac{T_2}{T_1}} \right) = \\
 &= \frac{1}{T_1 - T_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{1}{T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}}
 \end{aligned}$$

a pre pomer  $T_n / T_1$  platí :

$$\frac{T_n}{T_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}} \quad \text{alebo} \quad \frac{T_n}{T_1} = \tau_2^{\frac{\tau_2}{\tau_2 - 1}},$$

odkiaľ dostaneme:

$$T_n = T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}}. \quad (230)$$

Podobne môžeme uvažovať pomer  $T_n / T_2$ , pre ktorý platí :

$$\frac{T_n}{T_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_1}{T_2 - T_1}} \quad \text{alebo} \quad \frac{T_n}{T_2} = \tau_2^{\frac{1}{\tau_2 - 1}}$$

a po dosadení dostaneme :

$$y(T_\alpha) = 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_n} = 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_n}$$

Dobu  $T_m$  môžeme podľa Obr. 100 určiť zo vzťahu :

$$T_m = T_p - T_\alpha = T_n (1 - y(T_\alpha)) = T_n \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_n} \right) \right] = T_1 + T_2. \quad (231)$$

Dobu prietahu  $T_u$  môžeme určiť ako súradnicu priesečníka dotýčnice v inflexnom bode prechodovej charakteristiky so súradnicovou osou vedenú počiatočnou ustálenou hodnotou :

$$x(t) - x(T_\alpha) = x'(T_\alpha) \cdot (t - T_\alpha)$$

pre  $y(t) = 0$ ,  $t = T$ , z čoho bude :

$$T_u = T_\alpha - \frac{y(T_\alpha)}{y'(T_\alpha)} = T_\alpha - y(T_\alpha) \cdot T_n. \quad (232)$$

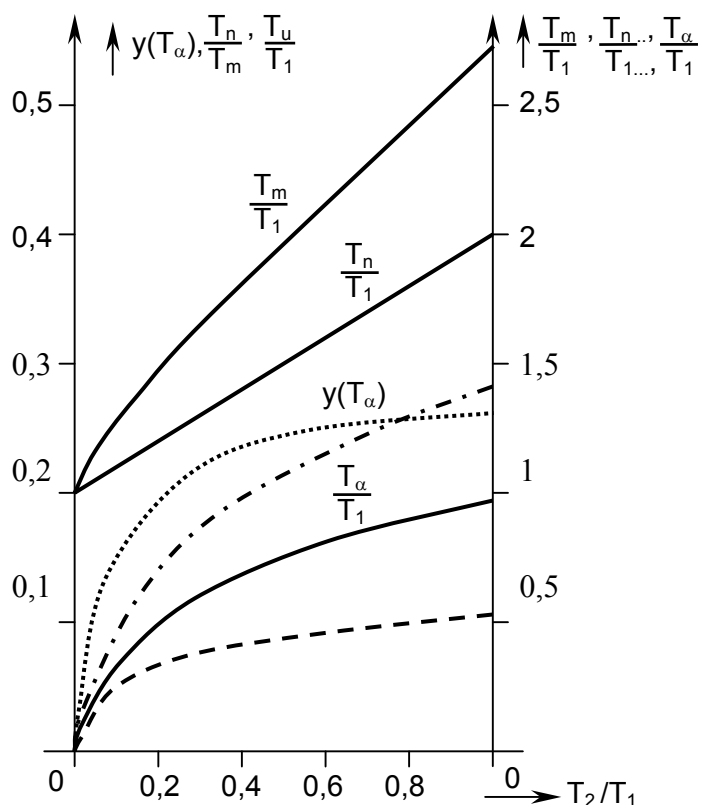
Ak teraz dosadíme do tejto rovnice už odvodené vzťahy pre  $T_\alpha$  a  $y(T_\alpha)$ , potom dostaneme :

$$T_u = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} + T_1 + T_2 - T_n, \quad (233)$$

alebo

$$\frac{T_u}{T_n} = \frac{1}{\frac{T_n}{T_1} - \frac{T_n}{T_2}} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_n} + \frac{T_2}{T_n} - 1. \quad (234)$$

Vybrané bezrozmerné hodnoty prechodových charakteristík sústav druhého rádu s rôzne veľkými časovými konštantami sú znázornené na Obr. 101.



Obr. 101 : Bezrozmerné hodnoty prechodových charakteristík sústav druhého rádu

Ak budeme vzťahovať hodnoty vo výraze pre výpočet doby  $T_m$  k dobe nábehu  $T_n$ , dostaneme :

$$\frac{T_m}{T_n} = \frac{T_1}{T_n} + \frac{T_2}{T_n}, \quad (235)$$

Časové konštanty  $T_1$ ,  $T_2$ , ich pomer a tiež poloha inflexného bodu  $T_\alpha$  nie sú závislé od hodnoty zosilnenia sústavy. Presnosť určenia konštánt  $T_1$  a  $T_2$  klesá, keď  $T_2/T_1$ , alebo  $T_1/T_2$  sa blížia k hodnote jedna. Limitná hodnota pomeru pre  $T_1=T_2$  (pozri Tab. 2) je daná vzťahom :

$$\frac{T_m}{T_n} = 0,736. \quad (236)$$

Iné postupy výpočtu časových konštánt  $T_u, T_p, T_n$  prípadne aj s použitím SIPRa sú uvedené v časti 2.3.2.1.

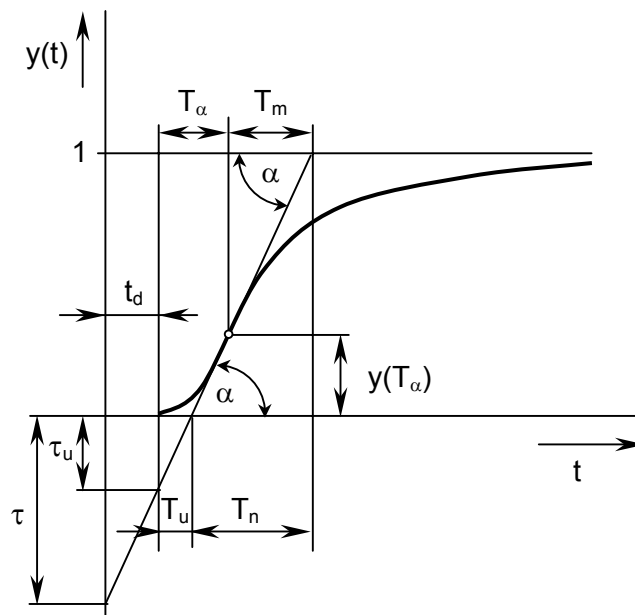
#### Poznámka :

Pre diferenciálne rovnice  $n$ -tého rádu, ak  $n > 2$ , nie je vo všeobecnom prípade možné explicitné vyjadrenie časových konštánt z parametrov nameranej prechodovej charakteristiky, ale musíme použiť približné numerické, alebo grafické metódy. Explicitné vyjadrenie je možné u metódy V. Strejca, ktorá vychádza zo zjednodušeného predpokladu, že u regulovaných sústav vyššieho rádu, ktorých charakteristická rovnica má záporné reálne korene, určujú tvar prechodovej charakteristiky iba najväčšie časové konštanty rádovo rovnakej veľkosti. Daná prechodová charakteristika sa aproximuje prechodovou charakteristikou, ktorá odpovedá fiktívnej sústave s rovnakými časovými konštantami. Za tohoto predpokladu je možné analyticky vypočítať rád  $n$  a časovú konštantu  $T$  tejto náhradnej sústavy a jej zodpovedajúcej diferenciálnej rovnice, resp. prenosu, z charakteristických hodnôt  $T_u, T_n, T_m, T_\alpha, y(T_\alpha), \tau_u$  znázornených na Obr. 100.

Vzťahy boli vyčíslené pre  $n=1$  až 10 a sú uvedené v tabuľke Tab. 2. V prípade, že určená hodnota  $T_u/T_n$ , leží medzi dvoma v tabuľke uvedenými hodnotami, zvolíme najbližší nižší rád náhradného prenosu a podľa Obr. 102 určíme fiktívne dopravné oneskorenie  $t_d$ .

n	$T_n/T$	$T_u/T$	$\tau_u = T_u/T_n$	$T_\alpha/T$	$y(T_\alpha)$	$T_m/T$	$T_m/T_n$
1	1	0	0	0	0	1	1
2	2,718	0,282	0,104	1	0,264	2,000	0,736
3	3,695	0,805	0,218	2	0,323	2,500	0,677
4	4,463	1,425	0,319	3	0,353	2,888	0,647
5	5,119	2,100	0,410	4	0,371	3,219	0,629
6	5,699	2,811	0,493	5	0,384	3,510	0,616
7	6,226	3,549	0,570	6	0,394	3,775	0,606
8	6,711	4,307	0,642	7	0,401	4,018	0,599
9	7,164	5,081	0,709	8	0,407	4,245	0,593
10	7,590	5,869	0,773	9	0,413	4,458	0,587

Tab. 2 : Dáta pre aproximáciu sústav vyššieho rádu



Obr. 102 : Určenie dopravného oneskorenia

Výsledný prenos bude mať tvar :

$$F(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^n} \cdot e^{-st_d} \quad (237)$$

Ak bude  $\tau_u = T_u/T_n < 0,1$ , potom sa volí pre aproximáciu sústava druhého rádu s konštantami rozličnej veľkosti  $T_1, T_2$ .

d) *Aproximácia sústavou druhého rádu*

Pri aproximácii sústavou (charakteristikou) druhého rádu by mala ležať súradnica inflexného bodu nameranej charakteristiky (Tab. 2) v rozsahu :

$$y(T_\alpha) = 0 \quad \text{až} \quad 0,264. \quad (238)$$

Keď nameraná prechodová charakteristika nemá dopravné oneskorenie, môžeme vhodnosť aproximácie charakteristikou druhého rádu posudzovať podľa hodnoty  $\tau_u = T_u/T_n$ , ktorá by podľa Tab. 2 mala byť v rozsahu hodnôt :

$$\tau_u = 0 \quad \text{až} \quad 0,104. \quad (239)$$

Ak teda uvažujeme prípad, keď doba dopravného oneskorenia  $t_d = 0$ , potom dostaneme pre jednotkový skok už známy vzťah :

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (240)$$

Experimentálne bolo zistené, že v rozsahu hodnôt  $(T_1 + T_2) < t < 2(T_1 + T_2)$ , nemá pomer  $\tau_2 = T_2/T_1$  praktický vplyv na veľkosť súradnice  $y(t)$ . Ak označíme všeobecne

$$t_1 = k_1(T_1 + T_2) \quad (241)$$

a uvažujme podmienku :

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0} y(t_1) = \lim_{\tau_2 \rightarrow 1} y(t_1), \quad (242)$$

potom výraz (241) sa zjednoduší pre :

$$\begin{aligned} \tau_2 = 0 & \quad \text{na } t_1 = k_1 T_1 \\ \tau_2 = 1 & \quad \text{na } t_1 = 2k_1 T_1 \end{aligned}$$

Podmienku (242) môžeme potom vyjadriť rovnicou :

$$(1 - e^{-k_1}) = 1 - e^{-2k_1} (1 + 2k_1), \quad \text{odkiaľ platí} \quad e^{k_1} = 1 + 2k_1.$$

Tejto transcendentnej rovnici vyhovuje koreň  $k_1 = 1,2564$ .

Rovnica (240) bola vyčíslená pre  $K = 1$ ,  $\tau_2 = 0$  a pre  $k_1 = 0,8; 1; 1,2; 1,2564; 1,4$  a bolo zistené, že podmienka (242) veľmi dobre vyhovuje pre určenie súčtu časových konštánt, pretože hodnota  $k_1 = 1,2564$  prináleží priemerná hodnota :

$$y(t_1) = \frac{y(t_1)_{\max} + y(t_1)_{\min}}{2} = \frac{0,724 + 0,716}{2} = 0,720$$

Teda u nameranej prechodovej charakteristiky druhého rádu môžeme pre  $y(t_1) = 0,720$  odpočítať príslušnú súradnicu  $t_1$  a vypočítať súčet časových konštánt :

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{k_1}, \quad (243)$$

Keď teraz vyhladáme súradnicu

$$t_2 = k_2(T_1 + T_2), \quad (244)$$

pre ktorú rozdiel

$$D = \lim_{\tau_2 \rightarrow 1} y(t_2) - \lim_{\tau_2 \rightarrow 0} y(t_2) \tag{245}$$

je najväčší, môžeme túto podmienku vyjadriť rovnicou :

$$\frac{\partial D}{\partial k_2} = \frac{\partial}{\partial k_2} [(1 + 2k_2) e^{-2k_2} - e^{-k_2}] = 0, \tag{246}$$

z ktorej dostávame rovnicu :

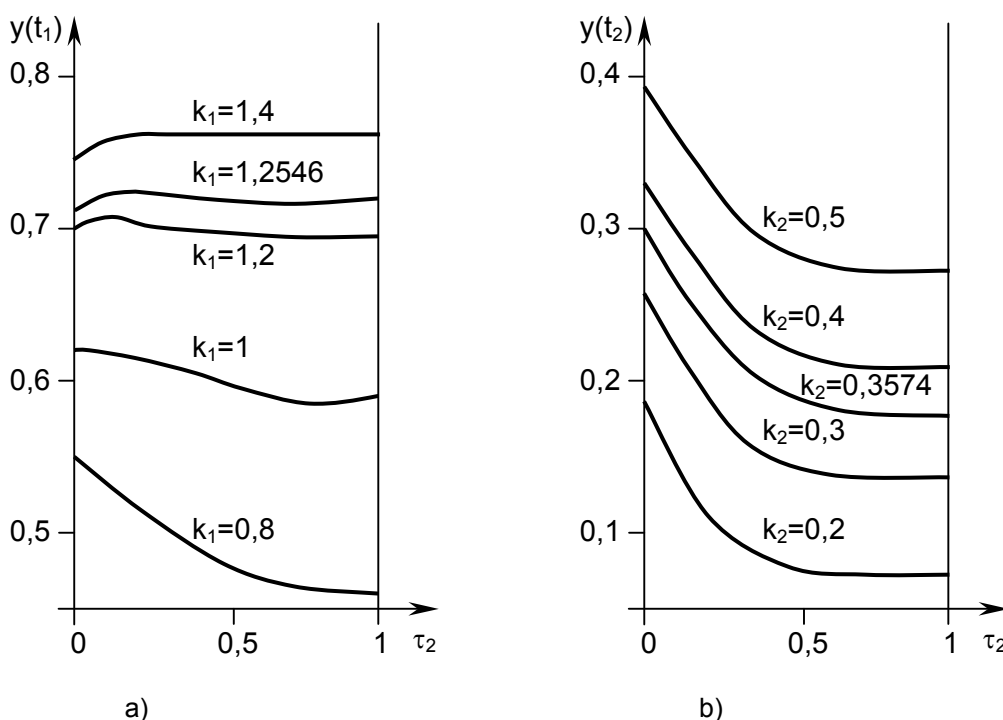
$$e^{k_2} = 4k_2$$

a jej koreň je  $k_2 = 0,3574$ .

Zo súradníc  $y(t_2)$ , vypočítaných z rovnice (240) pre  $K=1$ ,  $\tau_2=0$  až 1 a  $k_2= 0,2; 0,3; 0,3574; 0,4; 0,5$  bolo zistené, že pre uvedený rozsah  $k_2$  je najviac vhodná hodnota  $k_2=0,3574$ , ktorej prislúcha najväčší rozsah súradníc  $y(t_2)$  a teda, že je najvhodnejšia pre zisťovanie pomeru :

$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$$

Spomínané vzťahy pre  $k_1$  a  $k_2$  sú uvedené na Obr. 103 a, b.



Obr. 103 : Závislosti pre  $k_1$  a  $k_2$  pre aproximáciu sústavou druhého rádu

U nameranej prechodovej charakteristiky sa potom obidve časové konštanty  $T_1, T_2$  stanovujú tak, že po určení súčtu časových konštánt podľa vzťahu (243) sa vypočíta súradnica  $t_2$  podľa vzťahu (244) a potom sa z grafu prechodovej charakteristiky odčíta príslušná súradnica  $y(t_2)$ , a konečne z diagramu na obraze Obr. 103 b) vyhladáme pomer  $\tau_2$  podľa krivky  $k_2 = 0,3574$ . Riešením rovníc

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{k_1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \tau_2$$



určíme časové konštanty :

$$T_1 = \frac{t_1}{k_1(1+\tau_2)}, \quad T_2 = \frac{t_1\tau_2}{k_1(1+\tau_2)} \quad (247)$$

Určovanie obidvoch časových konštánt týmto postupom je tým presnejšie, čím presnejšie je zostrojený graf nameranej prechodovej charakteristiky a čím menší je pomer  $\tau_2$ . Ako je zrejmé z obrazu Obr. 103 b), krivky  $y(t_2) = f(\tau_2)$  majú so zmenšujúcou sa hodnotou  $y(t_2)$  stále menšie absolútne hodnoty smernice, preto pri malých hodnotách  $y(t_2)$  je určenie pomeru  $\tau_2$  nepresné, takže vypočítané hodnoty časových konštánt sa môžu odlišovať od hodnôt skutočných. Tieto odchýlky však nemajú významný vplyv na tvar prechodovej charakteristiky a môžeme ich zanedbať.

Uvedený postup môžeme použiť aj pri aproximácii prechodových charakteristík sústav vyšších rádo, keď je splnená podmienka (238), alebo (239).

e) *Identifikácia regulovanej sústavy metódou postupnej integrácie*

Ak poznáme priebeh prechodovej charakteristiky vyšetrovanej regulovanej sústavy, môžeme z neho určiť aj popisujúcu diferenciálnu rovnicu, stanovením príslušných koeficientov. V tejto časti si ukážeme, ako sa určujú hodnoty koeficientov *metódou postupnej integrácie*.

Nech bude popis regulovanej sústavy daný všeobecne lineárnou diferenciálnou rovnicou n-tého rádu :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (248)$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sú konštantné koeficienty,  $y(t)$  je výstupná veličina (zmena výstupnej veličiny), ktorú máme určiť a riadiť,  $u(t)$  je vstupná veličina (zmena vstupnej veličiny). Predpokladajme, že všetky korene charakteristickej rovnice sú reálne záporné, a že v čase  $t < 0$  a  $t \rightarrow \infty$  sú splnené nasledujúce podmienky :

$$y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (249)$$

$$a \quad y'(\infty) = y''(\infty) = \dots = y^{(n-1)}(\infty) = 0. \quad (250)$$

To znamená, že v čase  $t < 0$  a v čase  $t \rightarrow \infty$  je vstupná veličina  $u(t)$  aj výstupná veličina  $y(t)$  je nulová, teda regulovaná sústava je v *ustálenom stave*.

Uvažujme najprv prípad, keď  $u(0) = u(\infty)$  a tiež  $y(0) = y(\infty)$ . Príklad priebehu takejto vstupnej a výstupnej veličiny regulovanej sústavy je uvedený na Obr. 104. Keď budeme integrovať rovnicu (248) v medziach od nuly do nekonečna a dosadíme podmienky (249) a (250), potom môžeme vypočítať :

$$a_0 = \frac{\int_0^{\infty} u(t) dt}{\int_0^{\infty} y(t) dt}. \quad (251)$$

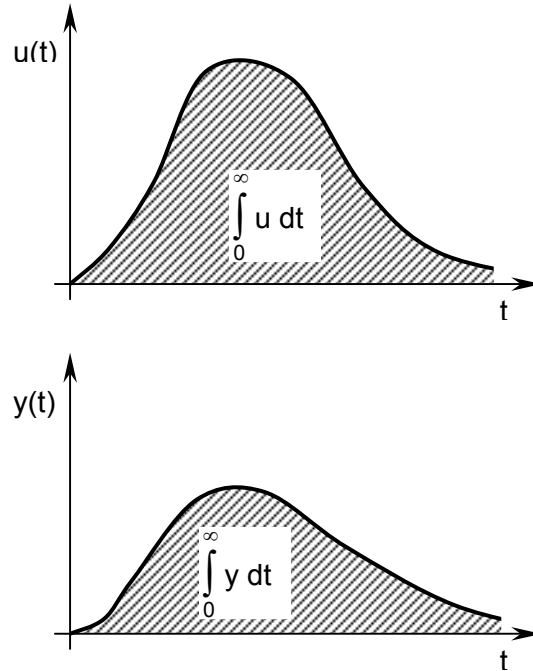
Integrál čitateľa v tomto vzťahu vyjadruje plochu ohraničenú krivkou  $u(t)$  a súradnicovou osou času vedenou ustálenými stavmi a menovateľ zlomku vyjadruje plochu ohraničenú krivkou  $y(t)$  a tou istou súradnicovou osou času (Obr. 104).

Pre určenie koeficientu  $a_1$  integrujme najprv rovnicu (248) v medziach od  $t$  do nekonečna a dosadíme podmienky dané vzťahom (250). Potom dostaneme :

$$-a_n y^{(n-1)}(t) - a_{n-1} y^{(n-2)}(t) - \dots - a_1 y(t) + a_0 \int_t^{\infty} y(t) dt = \int_t^{\infty} u(t) dt. \quad (252)$$

Keď budeme túto rovnicu integrovať znovu v medziach od nuly do nekonečna, môžeme vypočítať koeficient  $a_1$  :

$$a_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} y(t) dt} \left( a_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y(t) dt^2 - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u(t) dt^2 \right). \quad (253)$$



Obr. 104 : Príklad priebehu vstupnej a výstupnej veličiny identifikovanej sústavy

Integrál  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y(t) dt^2$  vyjadruje plochu (Obr. 105 a) obmedzenú krivkou  $\int_0^t y(t) dt$  a rovnobežkou vedenou bodom so súradnicou  $\int_0^{\infty} y(t) dt$ . Podobne môžeme popísať aj plochu vyjadrenú integrálom  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u(t) dt^2$ .

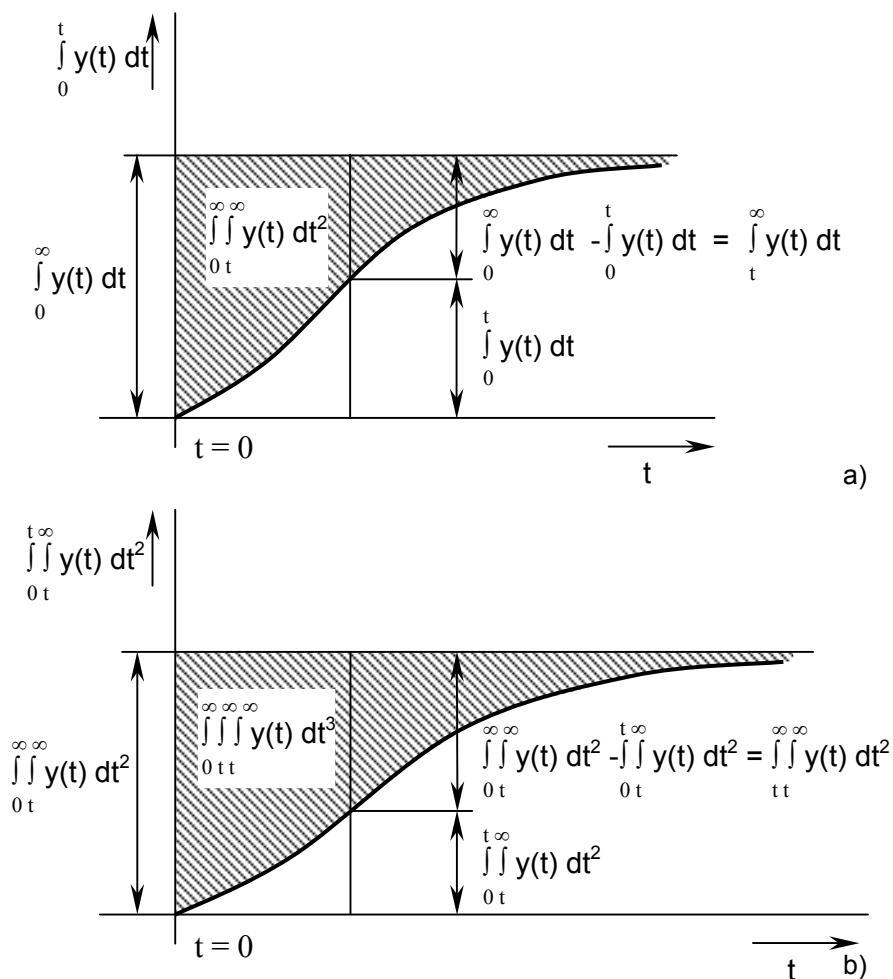
Pri výpočte ďalšieho koeficientu  $a_2$  postupujeme rovnako. Integrujeme najprv rovnicu (248) v medziach od  $t$  do nekonečna :

$$a_n y^{(n-2)}(t) + a_{n-1} y^{(n-3)}(t) + \dots + a_2 y(t) - a_1 \int_t^{\infty} y(t) dt + a_0 \int_t^{\infty} \int_t^{\infty} y(t) dt^2 = \int_t^{\infty} \int_t^{\infty} u(t) dt^2. \quad (254)$$

Po ďalšej integrácii tejto rovnice v medziach od nuly do nekonečna môžeme určiť koeficient :

$$a_2 = \frac{1}{\int_0^{\infty} y(t) dt} \left( \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u(t) dt^3 - a_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y(t) dt^3 + a_1 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y(t) dt^2 \right). \quad (255)$$

Integrál  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y(t) dt^3$  vyjadruje plochu obmedzenú krivkou  $\int_0^t \int_0^t y(t) dt^2$  a rovnobežkou so súradnicovou osou vedenou bodom so súradnicou  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y(t) dt^2$  (Obr. 105 b).



Obr. 105 : Geometrická interpretácia interálov pri identifikácii

Ďalší postup pri určovaní koeficientov  $a_3$  až  $a_n$  je rovnaký. Pre koeficient  $a_k$ , kde  $k > 0$ , je možné odvodiť všeobecný vzťah :

$$a_k = \frac{(-1)^k}{S_1(y)} \left( S_{k+1}(u) - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i a_i S_{k+1-i}(y) \right). \quad (256)$$

kde  $S_k(y)$  znamená  $k$ -násobný integrál premennej  $y$  podľa času :

$$S_k(y) = \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^\infty \dots \int_t^\infty y(t) dt^k. \quad (257)$$

Uvedený postup určovania koeficientov diferenciálnej rovnice regulovanej sústavy zo známeho časového priebehu vstupnej a výstupnej veličiny je možné aplikovať aj na zvláštne prípady časových priebehov vstupnej veličiny. Napríklad pre zmenu vstupnej veličiny regulovanej sústavy skokom o známej veľkosti  $y(\infty) - y(0)$  dostaneme :

$$a_0 = \frac{u(\infty) - u(0)}{y(\infty) - y(0)}. \quad (258)$$

$$a_1 = \frac{a_0 \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt}{y(\infty) - y(0)}. \quad (259)$$

$$a_2 = \frac{1}{y(\infty) - y(0)} \left[ a_1 \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt - a_0 \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt^2 \right]. \quad (260)$$

A všeobecne pre koeficient  $a_k$ , kde  $k > 0$ , platí :

$$a_k = \frac{1}{y(\infty) - y(0)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i+1} a_i S_{k-1}(y(\infty) - y(t)). \quad (261)$$

Pre astatické regulované sústavy, u ktorých je koeficient  $a_0 = 0$ , vypočítame pre vstupnú skokovú zmenu o veľkosti  $u(\infty)$ , keď platia počiatočné podmienky :

- pre  $t < 0$ ,  $u(0)=0$  :

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (262)$$

- a pre  $t \rightarrow \infty$  :

$$y''(\infty) = y'''(\infty) = \dots = y^{(n-1)}(\infty) = 0. \quad (263)$$

Pre koeficienty platí :

$$a_1 = \frac{u(\infty)}{y'(\infty)}, \quad (264)$$

$$a_2 = \frac{1}{y'(\infty)} \left[ a_1 \int_0^{\infty} (y'(\infty) - y'(t)) dt \right], \quad (265)$$

a všeobecne pre koeficient  $a_k$  platí :

$$a_k = \frac{1}{y'(\infty)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i+1} a_i S_{k-1}(y'(\infty) - y'(t)). \quad (266)$$

Viacnásobné integrály, ktorých geometrický význam je zrejmý z Obr. 105, je možné vypočítať viacerými numerickými metódami. Pri identifikácii metódou postupnej integrácie chyby v určení koeficientov  $a_i$  rastú v dôsledku približného integrovania, preto je táto metóda identifikácie vhodná pre sústavy do tretieho rádu., teda pre  $i \leq 3$ .

Bez dôkazu si v nasledujúcej časti uvedieme ešte metódu, ktorú navrhol M. P. Simoju. Pri tejto metóde predpokladajme, že prenos identifikovanej sústavy je v nasledujúcom tvare :

$$F(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}. \quad (267)$$

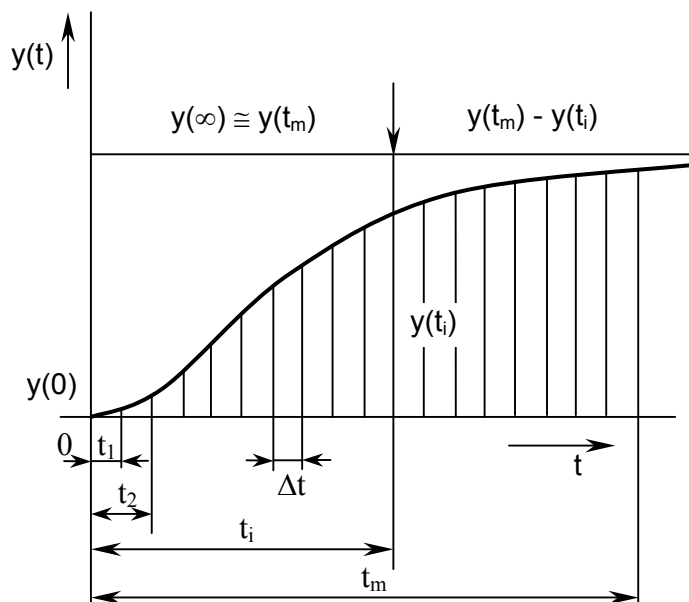
Jednotlivé koeficienty určíme z nasledujúcich vzťahov :

$$a_0 = \frac{u(\infty) - u(0)}{y(\infty) - y(0)}, \quad a_k = \frac{a_0 A_k}{y(\infty) - y(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (268)$$

pričom hodnotu integrálu  $A_k$  dostaneme z výrazu :

$$A_k = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) \left( \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i+1} \frac{a_i}{a_0} \frac{t^{k-i-1}}{(k-i-1)!} \right) dt, \quad (269)$$

ktorý je nutné vypočítať numericky.



Obr. 106 : Nameraná prechodová charakteristika identifikovanej sústavy

Potom pre nameranú prechodovú charakteristiku, znázornenú na Obr. 106, vypočítame hodnoty koeficientov  $A_k$ , po aplikácii napr. lichobežníkovej metódy na numerickú integráciu, pomocou ďalej uvedených vzťahov.

Pre  $A_1$  platí vzťah :

$$A_1 \cong \left( \frac{y(t_m) - y(0)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} (y(t_m) - y(t_j)) \right) \Delta t, \quad (270)$$

potom

$$a_1 = \frac{a_0 A_1}{y(\infty) - y(0)}. \quad (271)$$

Pre  $A_2$  platí vzťah :

$$A_2 \cong \left( \frac{(y(t_m) - y(0)) a_1 / a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} (y(t_m) - y(t_j)) \left( \frac{a_1}{a_0} - t_j \right) \right) \Delta t, \quad (272)$$

takže :

$$a_2 = \frac{a_0 A_2}{y(\infty) - y(0)}. \quad (273)$$

Ďalej pre  $A_3$  platí vzťah :

$$A_3 \cong \left( \frac{(y(t_m) - y(0)) a_2 / a_1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} (y(t_m) - y(t_j)) \left( \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} t_j + \frac{t_j^2}{2} \right) \right) \Delta t, \quad (274)$$

takže :

$$a_3 = \frac{a_0 A_3}{y(\infty) - y(0)} . \quad (275)$$

Náročnosť výpočtu samozrejme rýchle narastá s rastúcim  $k$ .

Náhradné prenosy v tvare :

$$F_1(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s} , \quad F_2(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} , \dots \quad (276)$$

konvergujú k hľadanému prenosu :

$$F(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} . \quad (277)$$

Výrazy  $A_k$  majú pritom nasledujúci geometrický význam :

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt , \\ A_2 &= \int_0^{\infty} \int_0^t (y_1(t) - y(t)) dt^2 , \\ &\dots \\ A_k &= \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t (y_1(t) - y(t)) dt^k , \end{aligned} \quad (278)$$

kde

$$x_i(t) = L^{-1} \frac{u(\infty) - u(0)}{s(a_0 + a_1 s + \dots + a_i s^i)} . \quad (279)$$

Presnosť určenia výrazov  $A_k$  je závislá na presnosti experimentálne zistenej prechodovej charakteristiky a od presnosti numerického výpočtu integrálov.

*f) Identifikácia regulovanej sústavy metódou derivácií prechodových charakteristík*

Táto metóda patrí tiež k experimentálnym metódam identifikácie a je založená na vyhodnocovaní prechodových charakteristík. Jedná sa o metódu derivácií prechodových charakteristík.

Predpokladajme, že na vstup nasledujúcej sústavy :

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (280)$$

pôsobí ľubovoľná budiaca funkcia  $u(t)$ , pričom  $y(t)$  je výstupná funkcia sústavy. Počiatočné podmienky nemusia byť u tejto metódy nulové. Ak vstupná a výstupná funkcia sú známe funkcie času, získané napríklad meraním, potom pre zvolené diskrétné časy  $t_i$  ( $i=2,3,\dots$ ) môžeme napríklad podľa vzťahu pre prvú a druhú diferenciu určiť hodnoty derivácií výstupnej veličiny a aj diskretizovať rovnicu (280) :

$$y^{(1)}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t} , \quad y^{(2)}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - 2y(t_{i-1}) + y(t_{i-2}))}{\Delta t^2} \quad (281)$$

$$a_2 \Delta t^{-2} (y(t_i) - 2y(t_{i-1}) + y(t_{i-2})) + a_1 \Delta t^{-1} (y(t_i) - y(t_{i-1})) + a_0 y(t_i) = u(t_i) \quad (282)$$

Pre každý časový okamih  $t_i$  musí byť rovnica (280) resp. (282) splnená. Ak by sme uvažovali tri experimentálne hodnoty  $u(t_i)$ ,  $y(t_i)$  pre zvolené diskrétné časy  $t_i$  ( $i=2,3,\dots$ ), potom po ich dosadení do rovnice (282) dostaneme sústavu troch lineárnych rovníc pre odhad neznámych koeficientov  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Vyriešením tejto sústavy rovníc a získaním hodnôt koeficientov  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  je identifikovaná sústava, z ktorej sme použili pri výpočtoch experimentálne dáta.

Aby sme mohli využívať pre identifikáciu viac meraných hodnôt  $u(t_i)$ ,  $y(t_i)$ , a tým spresniť identifikáciu sústavy (280), uvažujme pre odhad vektora neznámych parametrov  $\mathbf{a}$  ako kritérium chyby nasledujúci funkcionál :

$$E(\mathbf{a}) = \int_0^T (a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) - u(t))^2 dt \approx \min \quad (283)$$

Nutnou podmienkou pre dosiahnutie minima je :

$$\frac{\partial E(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = 0. \quad (284)$$

Z predošlých dvoch rovníc dostaneme po úpravách sústavu troch lineárnych rovníc pre vektor neznámych parametrov  $\mathbf{a}$  :

$$\begin{aligned} a_2 \int_0^T (y^{(2)}(t))^2 dt + a_1 \int_0^T y^{(2)}(t)y^{(1)}(t)dt + a_0 \int_0^T y^{(2)}(t)y(t)dt &= \int_0^T y^{(2)}(t)u(t)dt \\ a_2 \int_0^T y^{(2)}(t)y^{(1)}(t)dt + a_1 \int_0^T (y^{(1)}(t))^2 dt + a_0 \int_0^T y^{(1)}(t)y(t)dt &= \int_0^T y^{(1)}(t)u(t)dt \\ a_2 \int_0^T y^{(2)}(t)y(t)dt + a_1 \int_0^T y^{(1)}(t)y(t)dt + a_0 \int_0^T (y(t))^2 dt &= \int_0^T y(t)u(t)dt \end{aligned} \quad (285)$$

kde  $y(t)$ ,  $u(t)$  sú merané výstupné a vstupné funkcie sústavy a derivácie  $y^{(2)}(t)$ ,  $y^{(1)}(t)$  sú derivácie výstupnej funkcie sústavy, ktoré získame výpočtom pomocou vzťahov (281). Pri časovej diskretizácii sústavy (285) nahradíme spojité funkcie  $y^{(2)}(t)$ ,  $y^{(1)}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ , v diskrétnych časových okamihoch  $t_i$  ( $i=0,1,2,3, \dots, M$ ) ich diskrétnymi hodnotami, skrátene označenými  $y_i$ ,  $y_i^{(2)}$ ,  $y_i^{(1)}$ ,  $u_i$ , a integrovanie nahradíme sumáciou pre časový interval  $T$ , pre ktorý máme  $M+1$  meraných hodnôt zo sústavy. Potom dostaneme :

$$\begin{aligned} a_2 \sum_{i=0}^M (y_i^{(2)})^2 + a_1 \sum_{i=0}^M (y_i^{(2)} y_i^{(1)}) + a_0 \sum_{i=0}^M (y_i^{(2)} y_i) &= \sum_{i=0}^M (y_i^{(2)} u_i) \\ a_2 \sum_{i=0}^M (y_i^{(2)} y_i^{(1)}) + a_1 \sum_{i=0}^M (y_i^{(1)})^2 + a_0 \sum_{i=0}^M (y_i^{(1)} y_i) &= \sum_{i=0}^M (y_i^{(1)} u_i) \\ a_2 \sum_{i=0}^M (y_i^{(2)} y_i) + a_1 \sum_{i=0}^M (y_i^{(1)} y_i) + a_0 \sum_{i=0}^M (y_i)^2 &= \sum_{i=0}^M (y_i u_i)^2 \end{aligned} \quad (286)$$

Z tejto sústavy rovníc vieme vypočítať neznáme parametre  $\mathbf{a}$  sústavy (280), čím je úloha identifikácie parametrov sústavy vyriešená. Táto metóda je vhodná aj pre nelineárne sústavy a po modifikácii ju neskôr aplikujeme aj na identifikáciu sústav neceločíselného rádu.

**Príklad 26 :** Predpokladajme, že máme analytickým postupom identifikovať nelineárnu sústavu popísanú nasledujúcou nelineárnou diferenciálnou rovnicou :

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 (y(t))^3 = bu(t) \quad (287)$$

a model s odhadmi parametrov je potom v tvare :

$$y^{(2)}(t) + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 (y(t))^3 - \beta u(t) = e \quad (288)$$

Príslušné parciálne derivácie sú :

$$\frac{\partial e}{\partial \alpha_1} = y^{(1)}(t), \quad \frac{\partial e}{\partial \alpha_0} = y^3(t), \quad \frac{\partial e}{\partial \beta} = -u(t) \quad (289)$$

a po použití kritéria  $\int_0^T e^2 dt$  dostaneme sústavu rovníc :

$$\int_0^T e y dt = 0, \quad \int_0^T e y^3 dt = 0, \quad \int_0^T e u dt = 0.$$

Ak dosadíme za  $e$  vzťah (288), dostaneme sústavu rovníc :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^T (y^{(1)}(t))^2 dt + \alpha_0 \int_0^T (y(t))^3 y^{(1)}(t) dt - \beta \int_0^T y^{(1)}(t) u(t) dt &= - \int_0^T y^{(2)}(t) y^{(1)}(t) dt \\ \alpha_1 \int_0^T y^{(1)}(t) (y(t))^3 dt + \alpha_0 \int_0^T (y(t))^6 dt - \beta \int_0^T u(t) (y(t))^3 dt &= - \int_0^T y^{(2)}(t) (y(t))^3 dt, \quad (290) \\ \alpha_1 \int_0^T y^{(1)}(t) u(t) dt + \alpha_0 \int_0^T (y(t))^3 u(t) dt - \beta \int_0^T (u(t))^2 dt &= - \int_0^T y^{(2)}(t) u(t) dt \end{aligned}$$

odkiaľ určíme hľadané odhady parametrov.

V tejto časti (2.4.2) sme sa obmedzili len na ozrejenie základných pojmov z identifikácie a tiež takých metód identifikácie, ktoré podporujú lepšie pochopenie látky prebranej v predchádzajúcich častiach. Existuje množstvo iných metód. Ine alebo modifikované metódy sa používajú aj pre iné typy dynamických sústav. Pre podrobnejšie štúdium je nutné siahnuť po literatúre, ktorá sa zaoberá špeciálne problematikou identifikácie.



### 2.4.3 Stabilita spojitého lineárneho systému

Stabilita je základnou a nutnou (aj keď nepostačujúcou) podmienkou správnej činnosti (funkcie) regulačných obvodov. Regulačný obvod je v *rovnovážnom stave* (v rovnováhe), keď sa nemení regulovaná veličina s časom. Pod pojmom *stabilita* rozumieme vlastnosť regulovanej sústavy alebo regulačného obvodu vrátiť sa do rovnovážneho stavu, keď skončí pôsobenie poruchy, ktorá vyviedla obvod z pôvodného rovnovážneho stavu.

Regulačný pochod v lineárnych regulačných obvodoch s konštantnými parametrami je popísaný lineárnou diferenciálnou rovnicou  $n$ -tého rádu napríklad v nasledujúcom tvare :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t), \quad (291)$$

kde  $y(t)$  je regulovaná veličina alebo jej odchýlka od žiadanej hodnoty,  $u(t)$  je budiaca funkcia a závisí od druhu vonkajšej poruchy a miesta jej vstupu do regulačného obvodu, pričom koeficienty tejto diferenciálnej rovnice  $a_0, a_1, \dots, a_n$  musia byť reálne čísla. Po Laplaceovej transformácii tejto diferenciálnej rovnice a po označení prenosu regulovanej sústavy  $F(s)$ , je Laplaceov obraz regulovanej veličiny daný výrazom :

$$Y(s) = F(s) U(s) + L(s_0),$$

kde  $L(s_0)$  je operátor určený počiatočnými podmienkami. Po spätnej Laplaceovej transformácii predošlej rovnice dostaneme jej originálu v časovej oblasti :

$$y(t) = L^{-1} [ F(s) U(s) + L(s_0) ] = y_h(t) + y_p(t), \quad (292)$$

kde  $y_p(t)$  je *vynútená zložka* regulovanej veličiny, je to partikulárne riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice, závislé od jej pravej strany. Výraz  $y_h(t)$  predstavuje všeobecné riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice (bez pravej strany) a charakterizuje chovanie regulovanej veličiny v *prechodovom stave*.

*Regulačný obvod je stabilný*, keď s rastúcim časom  $t \rightarrow \infty$  sa všeobecné riešenie  $y_h(t)$  blíži k nule, t.j. keď sa v obvode ustáli vnútený stav  $y_p(t)$ , teda keď platí :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0 \quad \text{a} \quad y(t) = y_p(t). \quad (293)$$

Keď s rastúcim časom  $t \rightarrow \infty$  aj  $y_h(t)$  neobmedzene rastie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = \infty \quad \text{a} \quad y(t) = \infty, \quad (294)$$

nazývame taký obvod *nestabilným*.

Keď s rastúcim časom  $t \rightarrow \infty$  hodnota  $y_h(t)$  ani neobmedzene nerastie, ani nekonverguje k nule, je *obvod na hranici (medzi) stability*.

#### 2.4.3.1 Stabilita regulačných obvodov podľa koreňov charakteristickej rovnice

Riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice môžeme písať v tvare :

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} \quad (295)$$

kde  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sú korene charakteristickej rovnice a  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sú integračné konštanty.

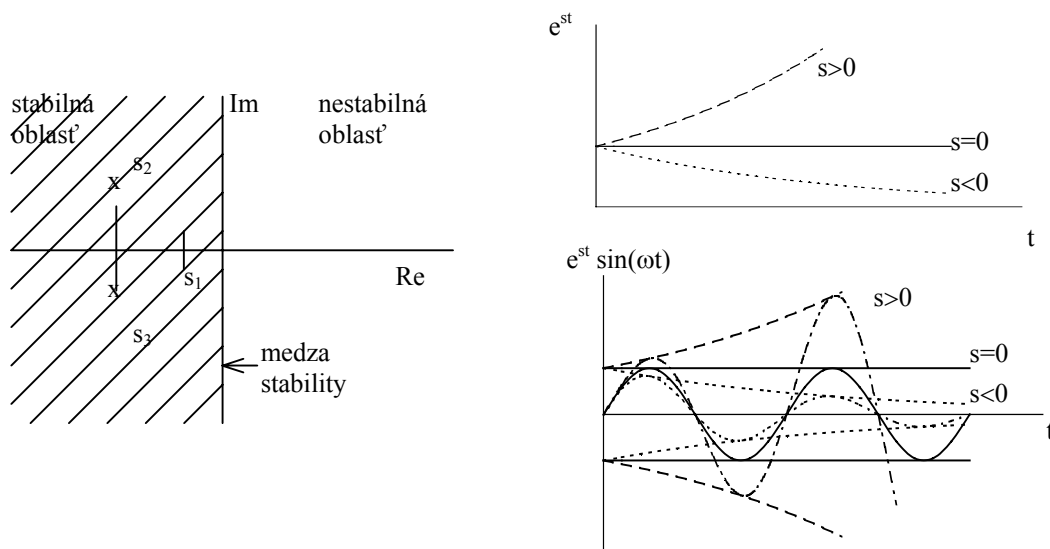
Už uvedená podmienka stability bude splnená, ak všetky členy predošlej sumy sa budú s časom blížiť k nule. To nastane len v prípade, keď *všetky korene charakteristickej rovnice budú záporné*. Nutnou

ale nepostačujúcou podmienkou toho je, aby všetky koeficienty  $a_1, a_2, \dots, a_n$  boli kladné. Pre  $n$  do hodnoty dva je to aj postačujúca podmienka. Ak charakteristická rovnica má aj komplexne združené korene, riešenie je v tvare :

$$y_h(t) = \sum_i C_i e^{s_i t} + \sum_k C_k e^{s_k t} \cos(\omega_k t + \Phi_k) \quad (296)$$

kde prvá suma je súčtom všetkých *exponenciálnych - aperiodických dejov* a druhá suma je súčtom všetkých *tlmených harmonických dejov* (ak reálne časti komplexne združených koreňov sú záporné).

Teda *obvod je stabilný vtedy a len vtedy*, ak sú *všetky reálne korene* charakteristickej rovnice *záporné alebo komplexne združené so zápornou reálnou časťou*. Výskyt hoci len jediného kladného reálneho koreňa alebo hoci jednej dvojice komplexne združených koreňov s kladnou reálnou časťou signalizuje, že obvod je *nestabilný*. Pri výskyte dvojice združených rýdzo imaginárnych koreňov je *obvod na medzi stability*, pokiaľ iné korene nespôsobujú jeho nestabilitu.



Obr. 107 : Typy koreňov a prechodových dejov

**Príklad 27 :** Predpokladajme, že regulačný obvod je popísaný nasledujúcou výslednou prenosovou diferenciálnou rovnicou :

$$y^{(2)}(t) + 3 y^{(1)}(t) + 2 y(t) = u(t) \quad (297)$$

Úlohou je posúdiť stabilitu tohto regulačného obvodu podľa koreňov charakteristickej rovnice.

Riešenie :

Charakteristická rovnica má tvar :

$$s^2 + 3 s + 2 = 0 \quad (298)$$

a jej korene sú  $s_1=-1$  a  $s_2=-2$ . Keďže všetky korene charakteristickej rovnice sú reálne a záporné, daný regulačný obvod je stabilný.

U zložitých systémov je zisťovanie koreňov dosť obťažné, preto sa v regulačnej technike používajú *nepriame metódy posudzovania stability*, ktoré vychádzajú buď z charakteristickej rovnice (tzv. analytické kritériá stability) alebo z frekvenčnej charakteristiky.

## 2.4.3.2 Hurwitzovo kritérium stability

Vychádza z koeficientov charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (299)$$

Obvod je stabilný, keď :

1. Všetky koeficienty charakteristickej rovnice sú kladné a ani jeden z koeficientov  $a_0$  až  $a_n$  nechýba. To je nutná hoci nie vždy postačujúca podmienka.
2. Hurwitzov skráteneý determinant  $H_n$  a všetky jeho hlavné subdeterminanty  $H_i$  sú väčšie ako nula. O dostatočnosti vyšetřovania skráteneého subdeterminantu sa presvedčíme rozvojom hlavného determinantu, pretože  $a_n > 0$  a ostatné koeficienty sú nulové.
3. Ak niektorý determinant  $H_i = 0$ , *obvod je na medzi stability*.

Hurwitzov skráteneý determinant  $H_n$  zostavíme z koeficientov  $a_0$  až  $a_n$  charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu nasledovne :

1. Do hlavnej diagonály skráteneého Hurwitzovho determinantu  $H_n$  napíšeme koeficienty charakteristickej rovnice od  $a_{n-1}$  až  $a_0$ .
2. Stĺpce nad diagonálou a pod ňou doplníme koeficientmi tak, aby spolu s koeficientmi v hlavnej diagonále vytvárali zhora nadol postupnosť koeficientov s narastajúcimi indexmi. Na miesta, pre ktoré už neexistujú koeficienty, napíšeme nuly.

$$\begin{aligned}
 H_1 &= | a_{n-1} |, & H_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, & H_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\
 &\dots & &\dots & &\dots \\
 H_n &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (300)
 \end{aligned}$$

Hurwitzov determinant môžeme vytvoriť aj tak, že bude otočený okolo hlavnej diagonály. Výpočet Hurwitzových determinantov vyšších stupňov môže byť bez dostupnosti vhodných počítačových programov dosť zdĺhavý. V praxi sa používa aj podobné Routh - Schurovo kritérium.

**Príklad 28 :** Pomocou Hurwitzovho kritéria stability vyšetřite stabilitu regulačného obvodu popísaného homogénnou lineárnou diferenciálnou rovnicou nasledujúceho tvaru :

$$y^{(3)}(t) + 4 y^{(2)}(t) + 2 y^{(1)}(t) + 4 y(t) = 0. \quad (301)$$

Riešenie :

K tejto homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici prislúcha nasledujúca charakteristická rovnica :

$$s^3 + 4 s^2 + 2 s + 4 = 0 \quad (302)$$

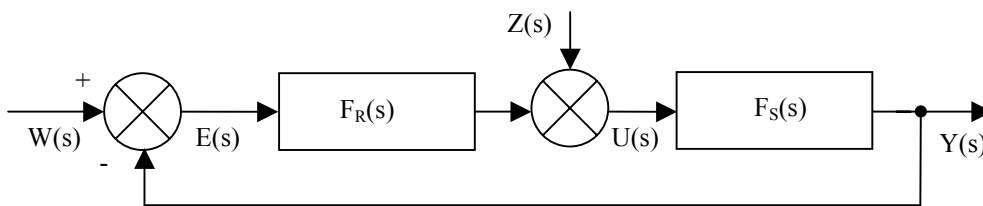
Ako je vidieť, všetky koeficienty  $a_3$  až  $a_0$  sú kladné, teda je splnená nutná podmienka pre stabilitu obvodu. Pre preskúmanie postačujúcej podmienky zostavíme Hurwitzov determinant  $H_3$  a jeho hlavné subdeterminanty  $H_1$  a  $H_2$  :

$$H_1 = 4 > 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad H_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0. \quad (303)$$

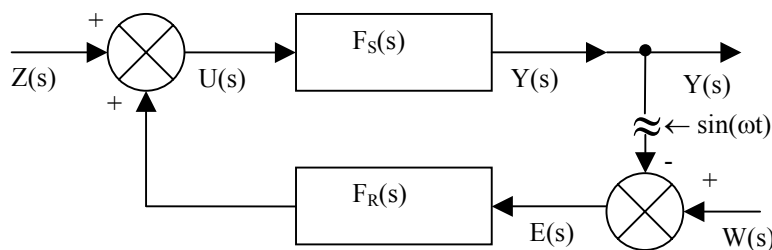
Pretože aj všetky Hurwitzove subdeterminanty sú kladné, tento obvod je stabilný.

### 2.4.3.3 Frekvenčné kritériá stability

Chovanie celého regulačného obvodu (Obr. 108) je dané vlastnosťami všetkých blokov, ktoré obsahuje (regulovaná sústava, regulátor, ...) a aj vlastnosťami signálov, ktoré vstupujú do obvodu z vonku (porucha, riadiaca veličina).



Obr. 108 : Spätnoväzobný regulačný obvod s dvoma vstupmi a jedným výstupom



Obr. 109 : Spätnoväzobný regulačný obvod s prerušenou spätnou väzbou

Pre prenos riadiacej veličiny  $W(s)$  takého regulačného obvodu s jednotkovým ziskom v spätnej väzbe (Obr. 108) platí :

$$F_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_R(s) F_S(s)}{1 + F_R(s) F_S(s)}. \quad (304)$$

Podobne prenos poruchy  $Z(s)$ , uvažovanej na vstupe riadenej sústavy (podobne aj pre poruchu na výstupe), platí :

$$F_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_R(s) F_S(s)}. \quad (305)$$

Ako je možné vidieť z posledných dvoch rovníc, charakteristická rovnica regulačného obvodu pre prenos riadenia aj pre prenos poruchy je v oboch prípadoch rovnaká. Teda v ďalšom postačí uvažovať len jednu.

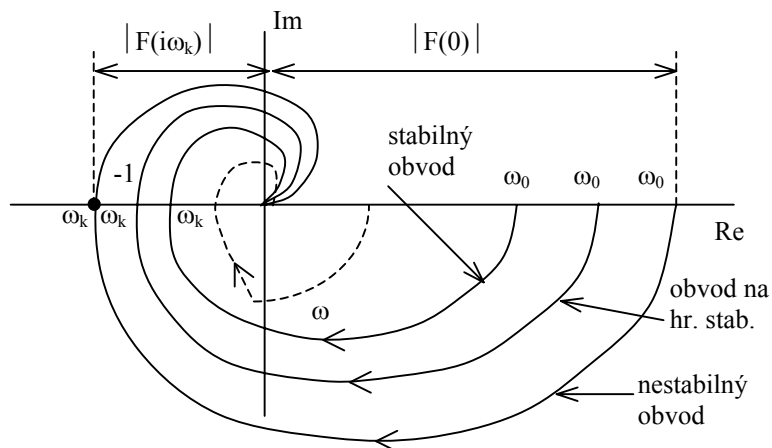
*Nyquistovo kritérium stability* - sformuloval Nyquist v roku 1932 pre zosilňovače so spätnou väzbou. Zaoberá sa vyšetrovaním stability spätnoväzobných obvodov na základe vlastností frekvenčnej charakteristiky rozpojeného spätnoväzobného obvodu, ktorú je možné získať analyticky alebo experimentálne. Ak spätnoväzobný obvod rozpojíme (Obr. 109) a na vstup regulátora pripojíme harmonický signál  $1 \cdot \sin(\omega t)$ , výstupný signál  $y(t)$  bude tiež harmonický s rovnakou frekvenciou ale fázovo posunutý posunom na regulátore aj sústave. Pri určitej frekvencii bude posun o  $180^\circ$ , kedy dochádza k zmene zápornej spätnej väzby na kladnú. Posun o ďalších  $180^\circ$  urobí zmiešavač, teda výsledný posun je o  $360^\circ$  resp.  $0^\circ$ . Ak harmonický signál odpojíme a obvod opäť uzavrieme, bude ďalej kmitať. Pre určenie stability uzavretého regulačného obvodu je dôležité zistiť, akú absolútnu hodnotu má prenos otvoreného obvodu  $|F_R(i\omega_k)|$   $|F_S(i\omega_k)|$ . Ak pri jednotkovej vstupnej amplitúde bude mať frekvenčná charakteristika pri prechode cez zápornú reálnu poloosu (kedy je fázový posun o  $180^\circ$ ) amplitúdu menšiu ako jedna (väčšiu ako jedna, alebo rovnú jednej), bude uzavretý regulačný obvod stabilný (nestabilný, na hranici stability).

Korene charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu pre prenos poruchy alebo riadenia :

$$1 + F_R(s) F_S(s) = 1 + F_0(s) \Rightarrow F_0(s) = -1$$

musia byť záporné alebo mať záporné reálne časti u komplexne združených koreňov, teda musia ležať vľavo od imaginárnej osi. Ak transformujeme rovinu koreňov "s" (Obr. 107) opäť do komplexnej roviny "F<sub>0</sub>(s)" podľa funkcie obrazového prenosu rozpojeného obvodu F<sub>0</sub>(s), všetky korene charakteristickej rovnice z roviny "s" sa v rovine "F<sub>0</sub>(s)" zobrazia do bodu (-1, i0), teda do tzv. kritického bodu (F<sub>0</sub>(s) = -1) a imaginárna os sa zobrazí z roviny "s" do roviny "F<sub>0</sub>(s)" ako množina bodov krivky F<sub>0</sub>(iω)=F<sub>R</sub>(iω)F<sub>S</sub>(iω) pre ω od -∞ do ∞, pre posúdenie stability stačí uvažovať frekvencie od 0 do ∞. Teda imaginárna os sa zobrazí ako frekvenčná charakteristika rozpojeného regulačného obvodu (Obr. 110).

*Uzavretý regulačný obvod je stabilný vtedy*, ak kritický bod (-1, i0) leží vľavo od frekvenčnej charakteristiky rozpojeného obvodu, ak po nej postupujeme v smere rastúcej frekvencie ω, keď kritický bod leží mimo plochy ohraničenej frekvenčnou charakteristikou F<sub>0</sub>(iω) a kladnou reálnou osou. Keď rozpojený obvod je astatický, frekvenčná charakteristika nezačína na kladnej reálnej osi, doplníme ohraničujúcu krivku oblúkom začínajúcim na kladnej reálnej osi a pokračujúcim v zápornom zmysle až po začiatok frekvenčnej charakteristiky.



Obr. 110 : Posudzovanie stability podľa Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky

Podobne je možné sformulovať kritérium stability spätnoväzobného regulačného obvodu aj podľa logaritmickú frekvenčnej charakteristiky, viď napr. [46], [47], [50], [56], [42], [43], [29] a pod.

## 2.4.3.4 Analýza stability spojitého systému v stavovom priestore

Metóda stavového priestoru (viď kapitola 2.2) vychádza z geometrickej kvalitatívnej teórie diferenciálnych rovníc a je založená na teoretických prácach francúzskeho matematika H. Poincaré. Táto metóda je použiteľná pre *lineárne* systémy opísané sústavou kanonických diferenciálnych rovníc. Je rovnako dobre použiteľná aj pre *nelineárne* systémy a po jej vhodnej modifikácii je použiteľná aj pre systémy obsahujúce *typické nelinearity*.

Ako už bolo uvedené, dôležitým aspektom systémov je ich stabilita. Systém je stabilný, ak jeho odozva pre ohraničené začiatočné podmienky, alebo pre ohraničené vstupné veličiny, nerastie bez ohraničenia. Koncept stability má veľký praktický význam. *Nestabilný systém je neakceptovateľný*. Stabilitu je možné posudzovať aj bez analytického riešenia rovníc dynamiky, čo má veľký význam pre prípad nelineárnych systémov.

Majme systém :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (306)$$

Systém, ktorý je opísaný touto rovnicou, sa nazýva *budený systém*, pretože na pravej strane rovnice sa objavuje vektor vstupných veličín  $\mathbf{u}(t)$ . Pre skúmanie problémov stability je dôležitý *voľný systém*. Voľný systém je daný rovnicou :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (307)$$

V tejto rovnici sa  $\mathbf{u}(t)$  neobjavuje, čo zodpovedá v reálnom procese konštantným hodnotám vstupných veličín. Ak sa čas  $t$  objavuje v rovniciach dynamiky explicitne ako argument  $\mathbf{f}$ , potom sa jedná o neautonómny systém. Naopak, ak sa čas  $t$  neobjavuje v rovnici dynamiky, potom hovoríme o autonómnom systéme.

V úvahách o stabilite systému popísaného rovnicou (307) sa budeme zaoberať stabilitou pohybu  $\mathbf{x}^s(t)$ , ktorý zodpovedá konštantným hodnotám vstupných veličín. Za účelom skúmania tejto stability pozorujeme ľubovoľné riešenie (pohyb) budeného systému  $\mathbf{x}(t)$ , ktoré je v čase  $t = 0$  v blízkosti  $\mathbf{x}^s(t)$ . Problém stability súvisí s otázkou, či s rastúcim časom  $t > 0$   $\mathbf{x}(t)$  ostáva v blízkosti  $\mathbf{x}^s(t)$ . Ak budeme definovať :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^s(t), \quad (308)$$

potom platí :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{x}^s(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^s(t), \mathbf{u}(t), t), \\ \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^s(t), \mathbf{u}(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^s(t), t), \\ \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), t). \end{aligned} \quad (309)$$

Riešenie  $\mathbf{x}^s(t)$  zodpovedá v tejto rovnici pre všetky  $t \geq 0$  vzťahu  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ . Tiež platí  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{0}$ , a preto stav v stavovom priestore, pre ktorý platí  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ , nazývame *rovnovážnym stavom systému* (309). Pretože táto rovnica sa dá vždy skonštruovať, stabilita rovnovážneho stavu môže byť interpretovaná ako stabilita rovnovážneho stavu v začiatku stavového priestoru.

Tvrdenia o stabilite, ktoré v ďalšom uvedieme, platia pre neautonómne systémy. Vzhľadom k tomu, že v procesových aplikáciách sú neautonómne systémy zriedkavosťou a vzhľadom na vyššie uvedené úvahy o rovnovážnom stave v ďalšom výklade sa obmedzíme na systém :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (310)$$

Rovnovážny stav  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  tohto systému vyhovuje rovnici :

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (311)$$

pretože v tomto stave platí  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$ .

Budeme predpokladať, že riešenie rovnice (310) existuje a je jediné. Stabilitu môžeme intuitívne definovať nasledovne : Ak  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  je rovnovážny stav systému (310), potom môžeme povedať, že  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  je *stabilný rovnovážny stav*, ak riešenie rovnice (310)  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]$ , ktoré začína v nejakom stave  $\mathbf{x}(t_0)$  „blízkom“ rovnovážneho stavu  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  zostane „blízko“ rovnovážneho stavu  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$ , alebo sa k nemu približuje.

Rovnovážny stav  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  je *nestabilný*, ak sa riešenie  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]$  začínajúce v nejakom stave  $\mathbf{x}(t_0)$  vzdaluje od rovnovážneho stavu  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$ .

V ďalšom uvedieme definície stability v Ljapunovovom zmysle, asymptotickej stability a asymptotickej stability vo veľkom.

*Definícia stability v Ljapunovovom zmysle* : Systém (310) je *stabilný* v rovnovážnom stave  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  (rovnovážny stav  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  systému (310) je *stabilný*) v Ljapunovovom zmysle, ak pre každé reálne číslo  $\varepsilon > 0$  existuje iné reálne číslo  $\delta(\varepsilon) > 0$  také, že pre všetky  $\mathbf{x}(t_0)$ , pre ktoré platí  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \delta$ , je podmienka  $\|\mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]\| \leq \varepsilon$  splnená pre všetky  $t \geq 0$ .

*Definícia asymptotickej (vnútornej) stability* : Systém (310) je *asymptoticky stabilný* v rovnovážnom stave  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$ , ak je *stabilný* v Ljapunovovom zmysle a ak pre všetky  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]$ , ktoré začínajú dostatočne blízko od rovnovážneho stavu  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$ , platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ .

*Definícia asymptotickej stability vo veľkom* : Systém (310) je *asymptoticky stabilný vo veľkom* v rovnovážnom stave  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$ , ak je *asymptoticky stabilný* pre všetky začiatočné stavy  $\mathbf{x}(t_0)$ .

Vo vyššie uvedených definíciách sme použili označenie  $\|\mathbf{x}\|$ . Jedná sa o označenie Euklidovej normy  $\|\mathbf{x}\|$  vektora  $\mathbf{x}$ , ktorá určuje vzdialenosť bodu určeného vektorom stavových veličín od rovnovážneho stavu  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  pomocou dĺžky stavového vektora  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ .

**Poznámka** : Norma vektora je nejaká funkcia, ktorá priradzuje každému vektoru  $\mathbf{x} \in R^n$  reálne číslo  $\|\mathbf{x}\|$ , ktoré spĺňa nasledovné podmienky:

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,
2.  $\|\mathbf{x}\| = 0$  vtedy a len vtedy  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
3.  $\|k\mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\|$  pre ľubovoľné reálne číslo  $k$ ,
4.  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  pre ľubovoľné  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z daného priestoru.

Príklady normy vektora :  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ ,  $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $\|\mathbf{x}\| = \max |x_i|$ . Na príklade dĺžky stavového vektora  $\mathbf{x}$ , t.j. na príklade normy  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2}$ , si môžeme ľahko overiť, že sú pre túto normu splnené všetky vlastnosti 1-4.

Ljapunovova teória stability predpokladá existenciu Ljapunovovej funkcie  $V(\mathbf{x})$ . O funkcii  $V(\mathbf{x})$ , ktorá je spojitá a má spojité parciálne derivácie hovoríme, že je kladne definitná v nejakom okolí  $\Delta$  začiatku stavového priestoru ak :

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (312)$$

$$a \quad V(\mathbf{x}) > 0, \quad (313)$$

pre všetky  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  v okolí  $\Delta$ . Ak podmienku (313) nahradíme podmienkou :

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (314)$$

pre všetky  $\mathbf{x} \in \Delta$ , potom  $V(\mathbf{x})$  je kladne semidefinitná. Ak zameníme v predchádzajúcich nerovnostiach znak „väčší“ za znak „menší“, potom hovoríme, že funkcia  $V(\mathbf{x})$  je záporne definitná a záporne semidefinitná.

Ak skúmame systém  $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  s rovnovážnym stavom v začiatku stavového priestoru, t.j. platí  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , potom na základe rôznych definícií stability môžeme uviesť vety o stabilite.

*Veta o stabilite v Ljapunovovom zmysle*: Ak kladne definitná funkcia  $V(\mathbf{x})$  môže byť určená tak, že

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (315)$$

potom je systém *stabilný* v začiatku v Ljapunovovom zmysle.

Funkcia  $V(\mathbf{x})$ , ktorá spĺňa podmienky predošlej vety o stabilite v Ljapunovovom zmysle, sa nazýva Ljapunovova funkcia.

*Veta o asymptotickej stabilite* : Ak kladne definitná funkcia  $V(\mathbf{x})$  môže byť nájdená tak, že :

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (316)$$

potom je systém asymptoticky stabilný v začiatku.

*Veta o asymptotickej stabilite vo veľkom* : Ak sú splnené podmienky vety o asymptotickej stabilite pre všetky  $\mathbf{x}$  a ak platí  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  pre  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , potom systém je asymptoticky stabilný v začiatku.

Všeobecný predpis pre konštrukciu Ljapunovových funkcií neexistuje. Ljapunovova funkcia pre daný systém neexistuje jediná. Ljapunovova funkcia sa často volí v tvare :

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n K_{rk} x_k x_r . \quad (317)$$

$K_{rk}$  sú reálne konštanty, pričom  $K_{rk} = K_{kr}$ , a potom predchádzajúcu rovnicu môžeme písať :

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} , \quad (318)$$

kde  $\mathbf{K}$  je symetrická matica.  $V(\mathbf{x})$  je kladne definitná, ak subdeterminanty :

$$K_{11}, \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}, \dots \quad (319)$$

sú väčšie ako nula.

*Veta o asymptotickej stabilite lineárnych systémov*: Lineárny systém :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (320)$$

je asymptoticky stabilný (vo veľkom v začiatku) vtedy a len vtedy, ak platí jedna z nasledovných vlastností :

1. Ljapunovova rovnica :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} = -\boldsymbol{\mu} , \quad (321)$$

s ľubovoľnou symetrickou kladne definitnou maticou  $\boldsymbol{\mu}$  má jediné symetrické kladne definitné riešenie  $\mathbf{K}$ .

2. všetky vlastné hodnoty matice systému  $\mathbf{A}$ , t.j. všetky korene charakteristického polynómu  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  majú strikne záporné reálne časti (t.j. ležia v otvorenej ľavej polrovine komplexnej roviny).

*Dôkaz*: Ukážeme platnosť časti vety 1, ktorá hovorí o dostatočnej podmienke stability. Majme Ljapunovovu funkciu v tvare :

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} , \quad (322)$$

ak  $\mathbf{K}$  je kladne definitná, potom :

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (323)$$

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (324)$$

$dV/dt$  bude :

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} . \quad (325)$$

Do tejto rovnice dosadíme  $d\mathbf{x}/dt$  z rovnice (320) a potom :

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (326)$$

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{x}. \quad (327)$$



Použitím rovnice (321) dostaneme :

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = -\mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{x} . \quad (328)$$

Pretože  $\boldsymbol{\mu}$  je kladne definitná matica :

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < 0 , \quad (329)$$

pre všetky  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  , a preto je systém asymptoticky stabilný v začiatku. Ljapunovovu funkciu môžeme písať:

$$V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 , \quad (330)$$

a preto :

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ pre } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty , \quad (331)$$

pričom zodpovedajúca norma je daná výrazom  $(\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x})^{1/2}$ . Dá sa jednoducho dokázať, že  $\mathbf{K}$  existuje. Všetky podmienky vety o asymptotickej stabilite vo veľkom v začiatku sú splnené. Časť vety – nevyhnutnosť – je oveľa ťažšie dokázať. Z výpočtového hľadiska sa matica  $\boldsymbol{\mu}$  volí :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{I} . \quad (332)$$

#### 2.4.3.5 Posúdenie stability sústav druhého rádu v stavovom priestore

Metódu stavového priestoru je možné použiť všeobecne pre sústavu  $n$ -kanonických diferenciálnych rovníc, z ktorých každá vyžaduje jednu súradnicu stavového priestoru. Vzhľadom na to, že táto metóda sa opiera o geometrický názor, je jej použitie pre sústavy prvého rádu jednoduché. Hlavnou oblasťou jej použitia sú rovnice pre sústavy druhého rádu, vedúce na vyšetovanie vo fázovej rovine. Je použiteľná aj pre sústavy tretieho rádu, ale tu sa už vyžadujú priestorové geometrické konštrukcie. Jej praktické použitie pre rovnice vyššieho ako tretieho rádu už naráža na značné ťažkosti.

Predpokladajme daný fyzikálny systém, ktorý je popísaný všeobecnou (lineárnou alebo nelineárnou) diferenciálnou rovnicou v tvare :

$$Y(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = F(u, u', u'', \dots, u^{(m)}) , \quad (333)$$

kde  $y$  – je veličina, ktorej priebeh máme určiť,  
 $u$  – je daná funkcia predstavujúca signál, ktorým je obvod budený,  
 $Y, F$  – sú funkcie – vo všeobecnosti aj nelineárne.

Z teórie diferenciálnych rovníc je známe, že diferenciálnu rovnicu  $n$ -tého rádu môžeme nahradiť sústavou  $n$ -diferenciálnych rovníc prvého rádu :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, u_1) , \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, u_2) , \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, u_n) , \end{aligned} \quad (334)$$

kde  $y_1=y, y_2=y', y_3=y'', \dots, y_n=y^{(n-1)}$ . Po uvedenej substitúcii budú hodnoty  $y_1, y_2, \dots, y_n$  hľadané časové funkcie, pričom  $y_1$  môže znamenať regulovanú veličinu a  $y_2, \dots, y_n$  pomocné premenné. Tieto premenné môžu mať rôzny fyzikálny význam.

V predošlom uvedení sústavu diferenciálnych rovníc môžeme tiež geometricky znázorniť, ak budeme premenné  $y_1, y_2, \dots, y_n$  považovať za súradnice nejakého bodu  $M$  v  $n$ -rozmernom priestore. Každému bodu tohto priestoru zodpovedá určitý stav alebo fáza sústavy. Preto sa taký priestor nazýva nielen stavový priestor ale aj fázový priestor. Posledné označenie sa používa hlavne v nelineárnych systémoch.

Napríklad pre obvody popísané diferenciálnou rovnicou druhého rádu dostaneme dvojrozmerný fázový priestor – *fázovú rovinu*. Jej súradné osi sú  $y_1, = y$  a  $y_2, = y'$ . Keď sa mení čas  $t$ , opisuje bod  $M$  krivku, ktorú nazývame *fázová trajektória*. *Fázová trajektória* je teda geometrickým znázornením dynamického chovania sa obvodu. Smer a rýchlosť pohybu bodu  $M$  (*zastupujúceho bodu*) určuje *fázová rýchlosť*. Je to vektor, ktorého zložky v súradných osiach sú :

$$\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt} \quad (335)$$

V prípade fázovej roviny bude teda fázová rýchlosť daná zložkami :

$$\frac{dy_1}{dt} = y', \quad \frac{dy_2}{dt} = y'' , \quad (336)$$

teda

$$v = i y' + j y'' , \quad (337)$$

Súhrn trajektorií prechádzajúcich cez všetky body  $n$ -rozmerného priestoru vytvára *fázový portrét* riešenia. Kým fázová trajektória podáva úplný obraz o jednom konkrétnom riešení sústavy rovníc, fázový portrét riešenia podáva úplný obraz vlastností všeobecného riešenia danej sústavy kanonických rovníc.

V autonómnej kanonickej sústave diferenciálnych rovníc :

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) , \quad (338)$$

môže pri vyšetrowaní fázovej trajektórie v priemetni  $(y_h, y_j)$  :

$$\frac{dy_j}{dy_h} = \frac{f_j(y_1, y_2, \dots, y_n)}{f_h(y_1, y_2, \dots, y_n)} , \quad (339)$$

nastať prípad, že v niektorom bode fázového priestoru obe funkcie  $f_j$  a  $f_h$  sa limitne blížia k nule. Hodnota smernice fázovej trajektórie sa stáva neurčitou a príslušný bod sa nazýva *singulárny bod* riešenia diferenciálnej rovnice. V singulárnom bode neplatí tvrdenie, že ním musí prechádzať jediná trajektória.

Pre kanonickú sústavu diferenciálnych rovníc v substitučnom tvare pre všeobecne nelineárnu sústavu druhého rádu :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 , \\ \frac{dy_2}{dt} &= f(y_1, y_2) , \end{aligned} \quad (340)$$

sa určia singulárne body z podmienok :

$$\begin{aligned} y_2 &= 0 , \\ f(y_1, y_2) &= 0 . \end{aligned} \quad (341)$$

Singulárne body musia teda ležať na osi  $y_1$ , ich počet môže byť konečný ale aj nekonečný.

Pre bližšie vysvetlenie uvažujme regulačný obvod druhého rádu, ktorého chovanie sa môže znázorniť vo fázovej rovine. Pre lineárny autonómny obvod uvažujme diferenciálnu rovnicu analyzovanú v podkapitole 2.4.1.6 v nasledujúcom tvare :

$$y''(t) + 2c\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 . \quad (342)$$

Korene jej charakteristickej rovnice sú :

$$s_{1,2} = \frac{1}{T} \left[ -c \pm i\sqrt{1-c^2} \right] = -\omega_0 \cdot c \pm i\omega_0 \sqrt{1-c^2}. \quad (343)$$

a určujú charakter priebehu  $y(t)$ , ktorý môže byť pretlmený, kriticky tlmený, kmitavý tlmený alebo netlmený.

Vo fázovej rovine odpovedajú takýmto priebehom charakteristické tvary trajektórií. Môžeme ich odvodiť podľa kanonickej sústavy diferenciálnych rovníc :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2c\omega_0 y_2 - \omega_0^2 y_1, \end{aligned} \quad (344)$$

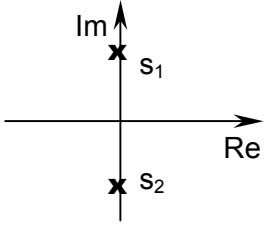
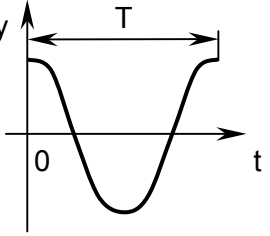
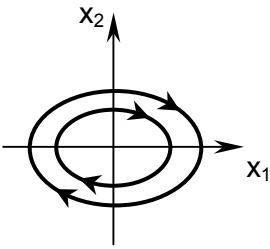
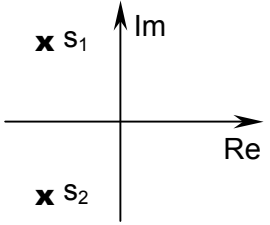
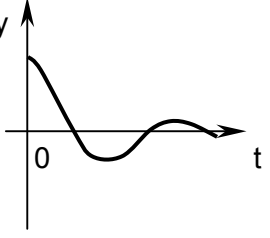
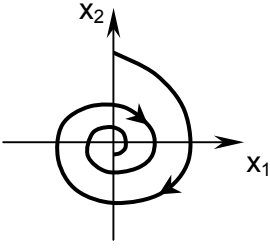
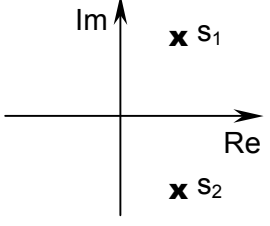
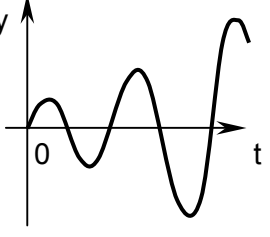
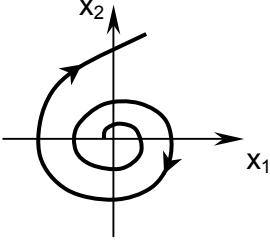
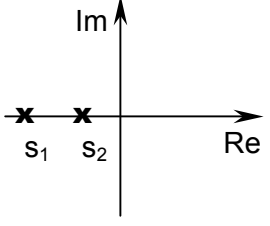
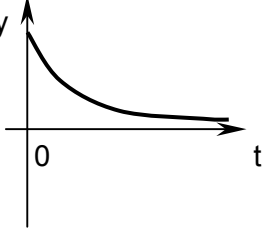
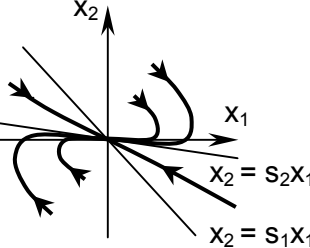
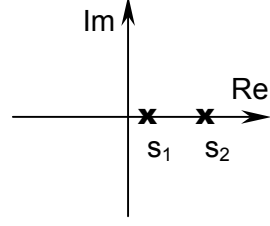
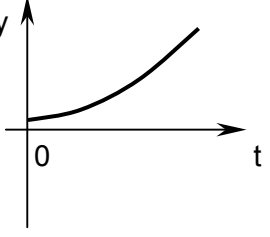
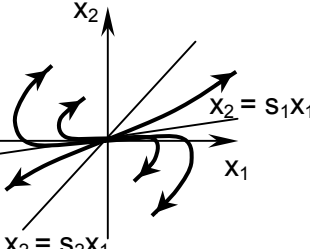
alebo podľa rovnice :

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{2c\omega_0 y_2 + \omega_0^2 y_1}{y_2}. \quad (345)$$

Pre riešenie vo fázovej rovine poznáme niekoľko typických tvarov fázových trajektórií. Analyzované prípady sú graficky zobrazené na Obr. 111, Obr. 112 a porovnané s riešením v časovej oblasti. Platí pre nich :

1. Netlmené kmity, pre  $c=0$ , sú znázornené fázovými trajektóriami v tvare uzavretých eliptických kriviek a daný fázový portrét sa označuje ako *stred*.
2. Tlmené kmity pre  $0 < c < 1$ ,  $\omega_0 > 0$ , ( $c^2 < 1$ ). Korene charakteristickej rovnice sú komplexne združené so zápornými reálnymi časťami. Fázové trajektórie sú špirály, ktoré sa asymptoticky blížia k počiatku súradnicového systému a daný fázový portrét sa označuje ako *stabilné ohnisko*.
3. Narastajúce (netlmené) kmity pre  $-1 < c < 0$ ,  $\omega_0 > 0$ , ( $c^2 < 1$ ). Korene charakteristickej rovnice sú komplexne združené s kladnými reálnymi časťami. Fázové trajektórie sú opäť špirály, ktoré sa vzdialujú od počiatku súradnicového systému a daný fázový portrét sa označuje ako *nestabilné ohnisko*.
4. Aperiodický tlmený priebeh pre  $c > 1$ ,  $\omega_0 > 0$ , ( $c^2 > 1$ ). Korene charakteristickej rovnice sú reálne záporné (jednoduché alebo dvojnásobné). Fázové trajektórie sa blížia k počiatku súradnicového systému a daný fázový portrét sa označuje ako *stabilný uzol*.
5. Aperiodický netlmený priebeh pre  $c < -1$ ,  $\omega_0 > 0$ , ( $c^2 > 1$ ). Korene charakteristickej rovnice sú reálne kladné (jednoduché alebo dvojnásobné). Fázové trajektórie sa vzdialujú od počiatku súradnicového systému a daný fázový portrét sa označuje ako *nestabilný uzol*.
6. Aperiodický priebeh pri reálnych koreňoch s rôznymi znamienkami. Fázový portrét sa označuje ako *sedlo*.
7. Ak korene charakteristickej rovnice sú reálne, pričom jeden je nulový, potom fázový portrét sa označuje ako *nepodstatná singularita stabilná*, ak druhý reálny koreň je záporný, alebo *nepodstatná singularita nestabilná*, ak druhý reálny koreň je kladný.

Pre porovnanie priebehu riešenia vo fázovej rovine s riešením v časovej oblasti je nutné dodať, že na Obr. 111 a Obr. 112 sú zobrazené priebehy riešenia v časovej oblasti len pre jedny počiatkové podmienky, kým riešenie vo fázovej rovine je zobrazené pre viac rôznych počiatkových podmienok. Potom napríklad riešenie v časovej oblasti pre nestabilnú nepodstatnú singularitu na Obr. 112 môže mať pri iných počiatkových podmienkach aj kvalitatívne iný priebeh. Vzhľadom na fakt, že analytické riešenie je triviálne, môže si čitateľ toto tvrdenie ľahko overiť.

Singulárny bod	Korene charakteristickej rovnice	Časový priebeh	Fázová trajektória
Stred			
Stabilné ohnisko			
Nestabilné ohnisko			
Stabilný uzol			
Nestabilný uzol			

Obr. 111 : Fázové trajektórie sústavy druhého rádu - a

Singulárny bod	Korene charakteristickej rovnice	Časový priebeh	Fázová trajektória
Sedlo			
Stabilný uzol			
Nestabilný uzol			
Nepodstatná singularita stabilná			
Nepodstatná singularita nestabilná			

Obr. 112 : Fázové trajektórie sústavy druhého rádu - b

## 2.4.4 Syntéza regulátorov

Globálne požiadavky na kvalitu riadiaceho obvodu, ako je napríklad šetrenie energiou, rýchlosť priebehu celého procesu, kvalitatívne parametre výstupnej veličiny, ekologické hľadiská a pod., sa neriešia na úrovni návrhu regulátora ale musia sa zohľadniť napríklad v návrhu trajektórií riadenia a pod.

Pre návrh regulátora je *podstatné chovanie obvodu v prechodovom deji*. Obyčajne oceňujeme prechodový dej podľa priebehu výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku vstupnej veličiny, pretože je to jeden z najnepriaznivejších prípadov, ktorý musí regulačný obvod zvládnuť. Podmienka stability je pritom podmienkou nutnou, nie však postačujúcou podmienkou pre správnu činnosť regulačného obvodu.

Pod syntézou regulačného obvodu rozumieme :

- 1.) návrh štruktúry regulátora a
- 2.) návrh parametrov regulátora.

Syntézu regulačného obvodu je možné urobiť niekoľkými metódami. Podľa toho, z akých princípov a súvislostí vychádza metodika výpočtu, hovoríme o nasledujúcich metódach :

- frekvenčné metódy,
- metódy založené na koreňoch charakteristickej rovnice,
- metódy založené na koeficientoch charakteristickej rovnice,
- štatistické (empirické) metódy výpočtu,
- metódy využívajúce podporné programové prostriedky.

Metódy syntézy sú známe aj pod niektorými názvami, napr. : metóda dominantných koreňov, metóda optimálneho modulu, metóda štandardných tvarov, metóda symetrického optima, Naslinova metóda, metóda koreňových trajektórií, metóda založená na integrálnych regulačných plochách a pod.

### 2.4.4.1 Kritériá kvality regulačného pochodu

Kvalitu prechodového deja môžeme charakterizovať rôzne, najčastejšie ju charakterizujeme podľa priebehu prechodovej charakteristiky, ktorú hodnotíme podľa týchto skupín kritérií :

- asymptotické kritériá,
- globálne kritériá,
- lokálne kritériá.

*Asymptotické kritériá kvality* - posudzujú regulačný pochod pri veľmi veľkých hodnotách času. Základným asymptotickým kritériom je *stabilita systému*. Druhým dôležitým asymptotickým kritériom je *statický prenos systému* alebo ustálená hodnota a určí sa na základe vety o konečnej hodnote :

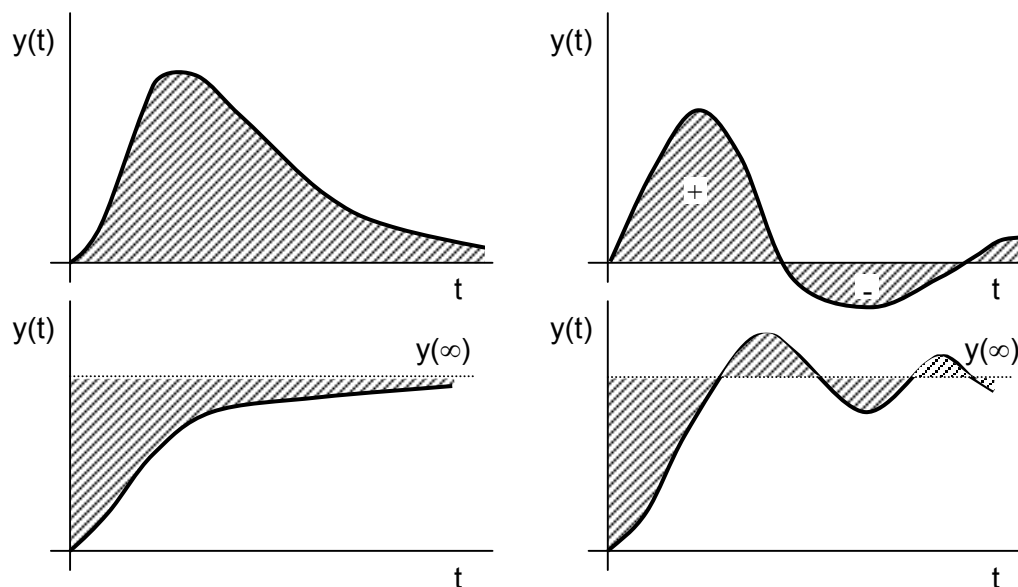
$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) \quad , \quad \text{pre } u(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad (346)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( F(s) \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

*Globálne kritériá kvality* - konštatujú existenciu alebo neexistenciu istej charakteristickej črty dynamického procesu. Ide napr. o *monotónnosť*, *kmitavosť*, *periodičnosť*, atď. Patrí ku nim aj kritérium *regulačná plocha* - lineárna pre dynamické deje aperiodické, alebo absolútna a kvadratická pre deje periodické (pre  $y(\infty)=y(0)$  a pre  $y'(\infty)=y'(0)$ ) s matematickým vyjadrením (347) a grafickým na Obr. 113.

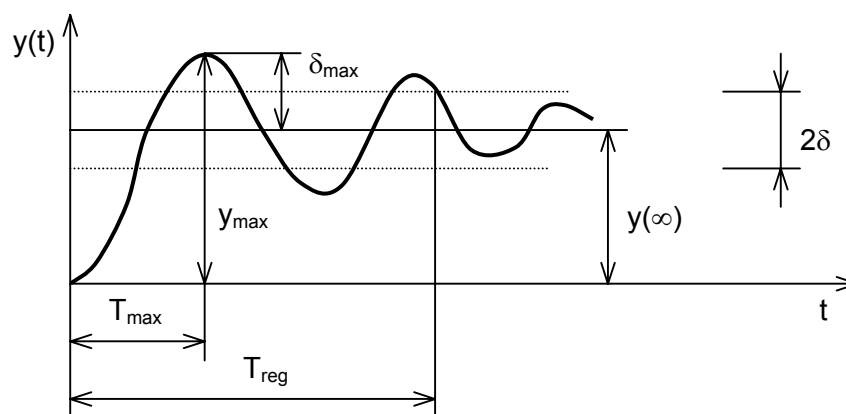
$$P_{zl} = \int_0^{\infty} y(t) dt, \quad P_{za} = \int_0^{\infty} |y(t)| dt, \quad P_{zk} = \int_0^{\infty} [y(t)]^2 dt \quad (347)$$

$$P_{wl} = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)] dt, \quad P_{wa} = \int_0^{\infty} |y(t) - y(\infty)| dt, \quad P_{wk} = \int_0^{\infty} [y(t) - y(\infty)]^2 dt$$



Obr. 113 : Regulačné plochy

Na Obr. 113 môžeme chápať priebehy v prvom stĺpci ako aperiodické odozvy a v druhom stĺpci ako periodické odozvy regulovanej sústavy, pričom horné priebehy sú odozvy na poruchovú veličinu  $w$  z dolné priebehy sú odozvy na riadiacu veličinu  $w$ . *Ideálna odozva* regulačného obvodu vzhľadom na poruchovú veličinu  $w$  by mala byť nulová a ideálna odozva regulačného obvodu vzhľadom na riadiacu veličinu  $w$  by sa mala rovnať riadiacej veličine, teda prechodová charakteristika by mala byť ako u sústavy nultého rádu (Obr. 78). To však vzhľadom na reálne časové konštanty regulovanej sústavy nie je možné a k ideálnym odozvám s *minimálnymi regulačnými plochami* sa len snažíme priblížiť.



Obr. 114 : Lokálne kritériá kvality

Ďalším typom sú *lokálne kritériá kvality*. Určujú sa z prechodovej charakteristiky. Patrí ku nim najmä :

- *preregulovanie* – je to maximálna hodnota prekmitu nad ustálenú hodnotu :

$$\delta_{\max} = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 [\%], \quad (348)$$

kde  $y_{\max}$  je prvá amplitúda dosiahnutá v čase  $T_{\max}$  (pre periodické deje),

- *rýchlosť regulácie* – je to čas prvého maxima prechodovej charakteristiky (preregulovania)  $T_{\max}$ , teda  $y(T_{\max}) = y_{\max}$ ,
- *doba regulácie*  $T_{\text{reg}}$  – je doba, po ktorej klesne rozdiel medzi hodnotou prechodovej charakteristiky a ustálenou hodnotou pod dohodnutú hodnotu  $\delta$ , obyčajne 5%, 2%, 1% ustálenej veličiny ( $T_{\text{reg}} > T_m$ ), teda platí  $|y(T_{\text{reg}}) - y(\infty)| \leq \delta$ ,
- *dobu prietahu*  $T_u$ , *dobu nábehu*  $T_n$  a *dobu prechodu*  $T_p = T_u + T_n$ , ktoré je možné určiť z priesečníkov dotýčnice v inflexnom bode s  $y(0)$  a  $y(\infty)$ , ako je to uvedené napr. v časti 2.3.2.1.

Na základe doby regulácie  $T_{\text{reg}}$  a žiadanej hodnoty  $w$  regulovanej veličiny  $y$  môžeme vypočítať plochu pod ideálnou prechodovou charakteristikou  $wT_{\text{reg}}$  a potom vyjadriť regulačnú plochu relatívne, napr. :

$$P_{w\%} = \frac{P_{wl}}{wT_{\text{reg}}} \cdot 100, [\%], \quad (349)$$

Uvedené kritériá kvality regulačných pochodov nám slúžia pri optimalizácii návrhu regulátorov. Dynamické pochody v uzavretom regulačnom obvode sú ovplyvňované prenosovými vlastnosťami sústavy  $F_S(s)$  aj regulátora  $F_R(s)$ . Prenosové vlastnosti sústavy sa meniť nedajú, ale dajú sa meniť prenosové vlastnosti regulátora, a tým aj celého regulačného obvodu. Štruktúru a parametre regulátora navrhujeme tak, aby regulačné pochody regulovanej sústavy s takýmto regulátorom zabezpečili zvolené hodnoty príslušného kritéria (minimálna regulačná plocha, najkratšia doba regulácie, trvalá regulačná odchýlka, miera stability, ...). Niekedy uvedené kritériá delíme len na dve skupiny, ktoré hovoria o presnosti regulácie ( $y(\infty)$ ) a o rýchlosti regulácie. Výber konkrétnych kritérií je často ovplyvnený aj druhom regulovanej sústavy. Je napríklad známe, že doba regulácie sa dosiahne kratšia, ak pripustíme kmitavý prechodový dej. To u niektorých sústav, ako je napríklad riadenie teploty ohrievacej pece, nie je vôbec na záväzok. U iných sústav, ako napr. riadenie posunu obrábacieho nástroja v sústruhu, vzhľadom na nutnú súčasť prerégulovania u takého deja úplne neprípustné.

#### 2.4.4.2 Základné typy a vlastnosti ústredných regulačných členov

Ako už bolo uvedené, *regulátor* je zariadenie, pomocou ktorého uskutočňujeme samočinnú reguláciu regulovaných sústav. Spolu tvoria uzavretý regulačný obvod (Obr. 12, Obr. 17, Obr. 48, Obr. 57, Obr. 108), v ktorom výstupná veličina z regulovanej sústavy je vstupnou veličinou do regulátora a výstupná veličina z regulátora je vstupnou veličinou do regulovanej sústavy. V širšom zmysle pod názvom regulátor zahrňujeme všetky prvky tvoriace regulačný obvod okrem regulovanej sústavy (Obr. 12). Ide tu hlavne o snímače, prevodníky, porovnávacie členy, ústredné regulačné členy, rozvody, pohony, akčné orgány a pod. Najväčší vplyv na priebeh regulačného pochodu majú prenosové vlastnosti regulovaných sústav a ústredných regulačných členov. Pri návrhu regulácie je teda potrebné poznať prenosové vlastnosti regulovanej sústavy a podľa nich voliť typ a nastavenie regulátora. Užitočné pri tom môžu byť aj niektoré apriórne poznatky pre jednotlivé typy regulovaných sústav :

- a) *Statické regulované sústavy nultého rádu* nemajú žiadne spozdenie. Vyskytujú sa zriedkavo. Príkladom môže byť odporová záťaž stabilizátora (t.j. regulátora napätia) napätia. Ku zväčšeniu odolnosti proti rozkmitaniu sa u týchto sústav umelo zavádza zotrvačnosť vo forme elektrolytického kondenzátora.
- b) *Zotrvačné sústavy prvého rádu* sa regulujú veľmi dobre na konštantnú hodnotu regulovanej veličiny, nie sú náchylné na kmitanie a sú málo citlivé na krátko trvajúce poruchy. Majú najväčšiu schopnosť autoregulácie zo všetkých typov sústav. Tieto jednoduše sústavy sú typické pre reguláciu teploty menších pecí, pre reguláciu otáčok motorov alebo tlaku plynov.
- c) *Sústavy vyšších rádo*v tlmíme, aby sme potlačili ich kmitanie. Veľké fázové posuny, spôsobené sústavami vyšších rádo



Príkladom spojenia kapacít rôzneho charakteru je ťažké koleso, ktorého otáčky sú regulované servomotorom cez dlhý, relatívne slabý (poddajný) hriadeľ. U veľkých pecí s mohutnou výmurovkou sa zasa uplatňuje tepelný odpor výmurovky rozložený v celom objeme s tepelnou kapacitou výmurovky podobne ako elektrické zotrvačné členy RC zapojené vo veľkom počte za sebou. Taká pec má charakter kmitavého člena vyššieho rádu. Čím je rád sústavy vyšší, tým je obtiažnejšia jej regulácia. Ak určíme z prechodovej charakteristiky sústavy hodnoty doby prietahu  $T_u$  a doby nábehu  $T_n$  (viď podkapitoly 2.3.2.1, 2.4.2), potom ich pomer informatívne charakterizuje obtiažnosť regulácie takýchto sústav :

- $T_u/T_n \leq 0,10$  - dobre regulovateľné,
- $T_u/T_n \cong 0,17$  - ešte regulovateľné,
- $T_u/T_n \geq 0,33$  - ťažko regulovateľné.

V praxi preto znižujeme dobu prietahu, napr. cirkuláciou vzduchu alebo miešaním ohrievanej tekutiny, prípadne zväčšením doby nábehu – napr. zväčšovaním objemu intenzívne miešanej tekutiny.

Ešte horšie sa regulujú *sústavy s dopravným oneskorením*  $t_d$ . Pre zotrvačné členy prvého rádu s časovou konštantou  $T$  môžeme pomer  $t_d/T$  dosadiť do vyššie uvedených vzťahov namiesto  $T_u/T_n$ , aby sme si urobili približnú predstavu o obtiažnosti regulácie. Dovoľuje to podobnosť prechodových charakteristík oboch sústav. V praxi sa snažíme zmenšiť dopravné oneskorenie na minimum a pokiaľ je to možné, zväčšiť zotrvačnosť sústavy tak, aby jej časová konštanta bola oveľa väčšia ako dopravné oneskorenie.

- d) Rýdza *derivačná sústava* sa v automatizačnej technike nevyskytuje. Výstup teoretickej derivačnej sústavy sa vracia sám na nulovú hodnotu, regulátor môže tento návrat len urýchliť. Ako príklad z nízko-frekvenčnej techniky by sme mohli použiť reproduktorovú sústavu pripojenú k výstupu komplementárneho dvojčinného tranzistorového zosilňovača cez väzbový kondenzátor, pričom záporná spätná väzba je odvodená od napätia na samotných reproduktoroch, teda až za kondenzátorom. Regulačná schopnosť zápornej spätnej väzby sa v tomto prípade neuplatní pre jednosmerný signál (teda pre stabilizáciu pracovného bodu) a pre striedavý signál nízkeho kmitočtu.
- e) *Astatické regulované sústavy* sú také sústavy, u ktorých pri konštantnej zmene akčnej veličiny na ich vstupe regulovaná veličina na ich výstupe trvalo klesá alebo stúpa. V ich diferenciálnych rovniciach chýbajú členy s nulovou deriváciou. Podľa počtu nulových koeficientov s najnižšími indexami hovoríme aj o stupni astaticizmu sústavy. Regulujú sa pomerne obtiažne, našťastie sa vyskytujú zriedkavo. Príkladom astatickej sústavy prvého rádu môže byť cylindrická nádrž, podobná ako na Obr. 92, ale len s jedným konštantným prítokom ako vstupnou veličinou  $u(t)$  a výškou hladiny ako výstupnou veličinou  $y(t)$  a napríklad s odtokom v dne nádoby (alebo bez odtoku). Pri konštantnom prítoku je v intervale po naplnení nádrže výška hladiny lineárnou funkciou času. Ak sa prítok rovná odtoku, hladina sa ustáli na konštantnej hodnote, ináč stúpa alebo klesá až po naplnenie alebo vyprázdenie nádrže. Astatické sústavy teda nemajú schopnosť ustáliť sa na určitej hodnote. Chýba im tzv. *autoregulačná schopnosť*. Obtiažnosť ich regulácie sa ešte zväčšuje, ak sa v sústavu súčasne uplatňuje aj doba prietahu alebo dopravné oneskorenie.

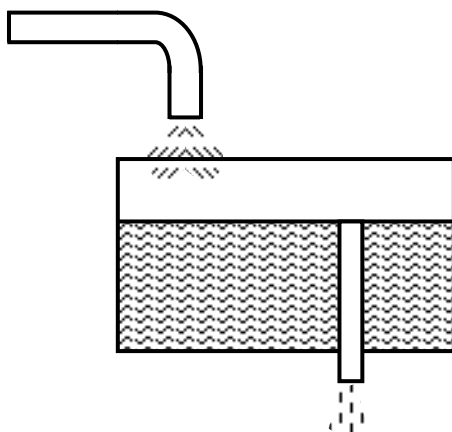
V ďalšej časti sa zameriame na ústredné regulačné členy (často označované aj ako regulátory v užšom zmysle), a to najmä z hľadiska ich dynamického spracovania regulačných odchýlok. Úlohou ústredných regulačných členov je vhodným spôsobom spracovať do nich vstupujúcu regulačnú odchýlku tak, aby výstupná veličina spôsobila čo najpriaznivejší zásah na vstupe do sústavy z hľadiska priebehu regulovanej veličiny. Regulátory môžeme deliť do skupín podľa rôznych hľadísk :

- a) Podľa *druhu energie* s ktorou pracujú : mechanické, pneumatické, hydraulické a elektrické regulátory. Elektrické regulátory používajú na napájanie elektrickú energiu. Regulačné systémy, ktoré využívali rôzne elektrické stroje (dynamá, motory, točivé a magnetické zosilňovače apod.) sú už dnes prekonané. Dnes sú veľmi rozšírené elektronické regulátory, ktoré využívajú najmodernejšie polovodičové súčiastky (tranzistory, tyristory, triaky, integrované obvody apod.). Iba akčné členy sú elektromechanické (elektromagnety, elektromagnetické ventily, servomotory). Najväčšou výhodou elektronických regulátorov je vysoká kvalita regulácie (vysoká presnosť a rýchlosť), malé rozmery a malá hmotnosť, vysoká energetická účinnosť, čistá a bezhlučná prevádzka s minimálnou údržbou, dostupnosť súčiastok a relatívne nízka cena. Ich nevýhodou je väčšia zložitosť, ktorá komplikuje

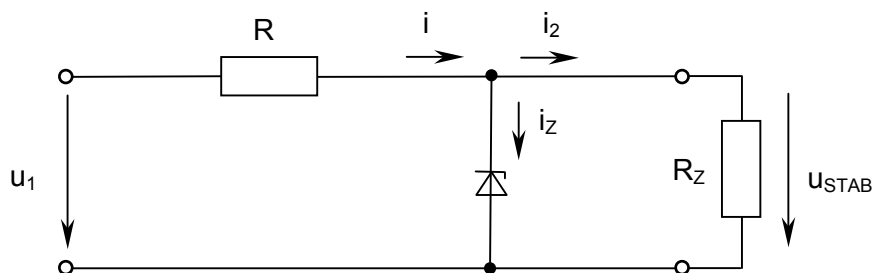
opravy. So zavedením integrovaných obvodov a ďalších moderných súčiastok vzrástla aj spoľahlivosť takýchto systémov, takže k poruchám dochádza zriedka. Ďalšou nevýhodou je ich istá citlivosť na poruchy v elektrickej sieti alebo na elektromagnetické polia. Niekedy tieto regulátory aj samé produkujú rušivé signály. Nápravou je dôkladné odrušenie všetkých rušení.

b) Podľa spôsobu napájania :

- *Priame* regulátory, ktoré odoberajú energiu na svoju činnosť priamo z regulovanej sústavy. Príkladom je Wattov regulátor otáčok alebo plavákový regulátor výšky hladiny apod. Zvláštnu skupinu priamych regulátorov tvoria aj systémy s prepacom, ako je to napríklad regulácia výšky hladiny s prepacom na Obr. 115. Rovnaký princíp sa využíva aj u varného tlakového (Papinovho)



Obr. 115 : Priamy regulátor výšky hladiny s prepacom



Obr. 116 : Regulátor napätia (stabilizátor) so stabilizačnou diódou

hrnca, u ktorého je pri prebytku tepla udržiavaný stály tlak ihlovým ventilom, ktorý je uzatváraný závažím alebo pružinou. Regulácia prepacom sa využíva aj pri paralelných stabilizátoroch napätia, z ktorých najznámejší je stabilizátor so stabilizačnou diódou (Obr. 116). Napájacie napätie  $u_1$  musí byť také veľké a odpor rezistora  $R$  taký malý, aby pri najväčšom odbere prúdu  $i_2$  nespôsobil úbytok napätia na rezistore pokles výstupného napätia pod požadovanú hodnotu  $U_{STAB}$ , ktorá je určená Zenerovým napätím diódy. Prebytok vstupného prúdu  $i$  veľkosti  $i_z$  prechádza diódou, ktorá je preto najviac zaťažovaná stratovým výkonom pri odpojenej záťaži  $R_z$ . Spoločným znakom a nevýhodou týchto regulátorov je strata časti energie, čo spôsobuje ich nízku energetickú účinnosť. Takýto spôsob sa používa s výhodou na istenie horných medzných hodnôt rôznych veličín.

- *Nepriame* regulátory odoberajú energiu na svoju činnosť zo zvláštneho napájacieho zdroja. Vyznačujú sa väčšou zložitosťou a tomu zodpovedajúcou vyššou kvalitou regulácie.

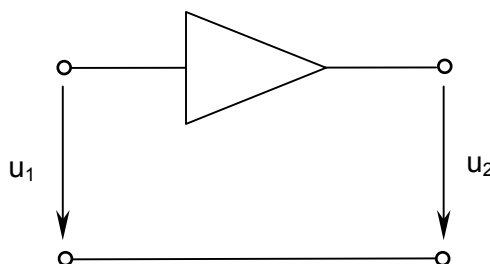
c) Podľa priebehu prenášaného signálu :

- *Spojité* regulátory pracujú so spojitými signálmi. Hlavnými stavebnými prvkami sú operačné zosilňovače. Kvalita regulácie je vysoká, ich návrh je pomerne jednoduchý. Pre veľké výkony je však nevýhodná ich menšia energetická účinnosť.

- *Nespojité* regulátory pracujú s nespojitými signálmi. Ďalej je ich možné rozdeliť na nespojité v čase, teda impulzné, a nespojité v amplitúde (dvoj alebo viacpolohové). Vďaka spínaciemu režimu aktívnych prvkov, s krátkymi časmi spínania, dosahujú veľmi vysokú účinnosť. Môžu byť veľmi jednoduché pre nižšiu kvalitu regulácie, alebo zložitejšie, ak požadujeme kvalitu ako pri spojitych regulátoroch (tzv. kvazispojité regulátory). Nespojité regulátory sú veľmi perspektívne pre ich vysokú účinnosť a spoľahlivosť. Ich nevýhodou je vznik rušenia ako dôsledok širokého frekvenčného spektra spôsobeného vyššími harmonickými signálmi, ktoré vznikajú pri spínaní energie. Aj tu je potrebné dôkladné odrušenie príslušných elektrických obvodov, aby rušenie neprevyšovalo prípustnú úroveň. Číslicové regulátory sú realizované obvyčajne pomocou číslicového počítača.
- d) Podľa *linearity* :
- *Lineárne*, príp. *kvazilineárne* regulátory používané prevažne pri spojitých reguláciách. Linearita v danom pracovnom bode je dosiahnutá zavedením silnej zápornej spätnej väzby operačných zosilňovačov.
  - *Nelineárne* regulátory sú typické pre nespojitú reguláciu. Typickými prvkami sú spínacie tranzistory, rôzne klopné obvody, číslicové integrované obvody, tyristory a triaky, prípadne relé a stykače.
- e) Podľa prenosových dynamických vlastností, t.j. podľa spôsobu spracovania regulačnej odchýlky  $e$ , ich delíme na :
- proporcionálny regulátor (P),
  - integračný regulátor (I),
  - derivačný regulátor (D),
  - proporcionálne integračný regulátor (PI),
  - proporcionálne derivačný regulátor (PD) a
  - proporcionálne integračne derivačný regulátor (PID).

V ďalšej časti si povieme viac o ich obrazových prenosoch, o ich dynamických vlastnostiach a tiež aj o princípe ich elektronickej realizácie. Prehľad o týchto charakteristikách ideálnych aj neideálnych regulátorov, a to ako základných typov tak aj ich kombinácií, je uvedený ako pri ich podrobnejšom popise, tak aj potom sumárne na Obr. 130, Obr. 131, Obr. 132, Obr. 133, Obr. 134.

*Proporcionálny regulátor P* iba zosilňuje regulačnú odchýlku  $e$ , pričom zosilnenie je v širokom frekvenčnom rozsahu konštantné. Až pri vysokých frekvenciách, ktoré nie sú pre danú regulovanú sústavu podstatné, jeho prenos vplyvom zotrvačnosti klesá. Ide teda o proporcionálny člen s konštantným reálnym prenosom omnoho väčším ako jedna. Tento regulátor sa dá ľahko vytvoriť jednosmerným invertujúcim zosilňovačom, ktorý je symbolicky znázornený na Obr. 117.



Obr. 117 : Ideálny invertujúci jednosmerný zosilňovač

U ideálneho zosilňovača sa predpokladá nekonečný vstupný odpor, nulový výstupný odpor a nekonečné zosilnenie  $A$  bez spätnej väzby. Potom môžeme pre taký zosilňovač písať :

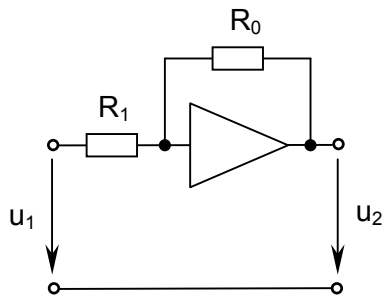
$$U_2 = -AU_1. \quad (350)$$

Prenos proporcionálneho regulátora v zapojení podľa Obr. 118 je daný pomerom odporov, všeobecne impedancií, v priamej a v spätnej väzbe :

$$F_p(s) = -R_0 / R_1. \quad (351)$$

Ideálny zosilňovač môžeme dobre nahradiť skutočným operačným zosilňovačom s použitým invertujúcim vstupom. Pre vysvetlenie vlastností budeme pracovať so zjednodušeným ideálnym zosilňovačom podľa Obr. 117. Jeho zosilnenie je možné nastaviť veľmi jednoducho pomocou zápornej spätnej väzby. Schéma proporcionálneho regulátora je na Obr. 118. Znamienko mínus vyjadruje, že použitý zosilňovač obracia fázu, teda invertuje :

$$U_2 = -\frac{R_0}{R_1} U_1 = KU_1. \quad (352)$$



Obr. 118 : Základné zapojenie proporcionálneho regulátora

Ak zdroj vstupného signálu nemá nulový vnútorný odpor  $R_G$ , potom musíme hodnotu tohto odporu pripočítať k odporu  $R_1$ , potom pre proporcionálnu konštantu platí :

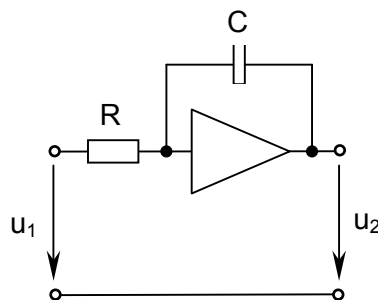
$$K \approx -\frac{R_0}{R_1 + R_G}. \quad (353)$$

Teda prenos proporcionálneho regulátora je daný pomerom odporov v spätnej väzbe a odporov na vstupe. Skutočné proporcionálne regulátory (Obr. 130) nemajú prenos ideálne konštantný, teda nezávislý na frekvencii. Základným znakom týchto regulátorov však je, že sa ich prechodová charakteristika v relatívne krátkom čase ustáli na hodnote  $K$ . Konštantna proporcionálneho regulátora  $K$  (zosilnenie) sa často vyjadruje aj pomocou tzv. pásma proporcionality :

$$pp = \frac{1}{K} 100, \quad [\%]. \quad (354)$$

*Pásmo proporcionality* teda vyjadruje, o koľko sa musí zmeniť vstupná veličina  $e(t)$  do regulátora, aby sa jeho výstupná veličina  $u(t)$  zmenila v plnom rozsahu o 100%.

*Integračný regulátor I* ako jediný umožňuje úplné odstránenie regulačnej odchýlky  $e$  (teda tzv. trvalej regulačnej chyby), lebo tá je regulátorom integrovaná. K jej úplnému vynulovaniu však dochádza až za určitý čas, teda samotný regulátor I je pomalý. Hodí sa tam, kde poruchy nie sú príliš časté alebo regulovaná sústava má veľkú zotrvačnosť, veľkú odolnosť proti krátkodobým poruchám.



Obr. 119 : Základné zapojenie integračného regulátora

Aj integračný regulátor je možné ľahko realizovať pomocou jednosmerného invertujúceho zosilňovača. Na Obr. 119 je základné zapojenie takého regulátora. Podobne ako pre proporcionálny regulátor, aj pre integračný regulátor môžeme vyjadriť jeho obrazový prenos ako pomer spätnoväzobnej impedancie a vstupnej impedancie (vstupného odporu) :

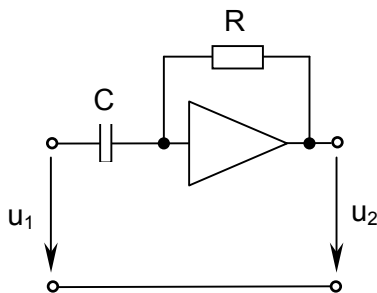
$$F_I(s) = -\frac{1}{sRC}. \quad (355)$$

Činnosť takého integračného regulátora je v praxi veľmi uspokojivá. Parazitné zotrvačnosti (Obr. 131) sa totiž uplatňujú až pri vyšších frekvenciách, kedy je už ale prenos I regulátora aj tak veľmi malý. Veľká amplitúda prenosu sa požaduje pri jednosmernom signále a tiež aj pri striedavých signáloch s veľmi nízkymi frekvenciami. Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika má v oblasti nízkych frekvencií sklon  $-20$  dB/dek a pretína úroveň  $0$  dB pri frekvencii  $\omega=1/RC$ . Fázová logaritmická frekvenčná charakteristika je v tomto pracovnom rozsahu daná priamkou na úrovni  $-90^\circ$ . Prechodová charakteristika je lineárne narastajúca priamka, vychádzajúca z počiatku, pričom jej strmosť je nepriamoúmerná časovej konštante  $RC$  spätnoväzobného deliča (integračná časová konštanta  $T_I=RC$ ).

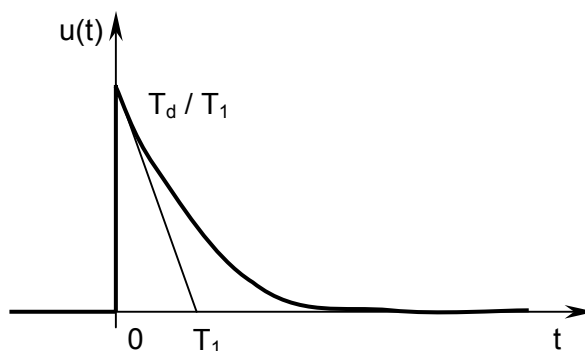
Ideálny *derivačný regulátor D* nie je možné realizovať. Spôsobujú to parazitné zotrvačnosti, ktoré potlačujú prenos pri vysokých frekvenciách, teda v oblasti, kde má byť prenos regulátora najväčší. Na Obr. 120 je základné zapojenie derivačného regulátora. Ideálny prenos určuje opäť pomer odporu v spätnej väzbe a impedancie na vstupe :

$$F_D(s) = -sRC = -sT_D. \quad (356)$$

kde  $T_D=RC$  je derivačná časová konštanta.



Obr. 120 : Základné zapojenie derivačného regulátora



Obr. 121 : Prechodová charakteristika skutočného derivačného regulátora

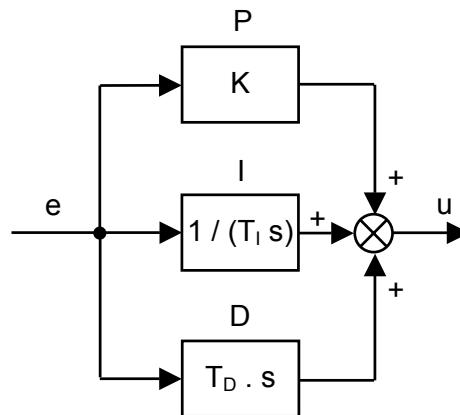
Ak chceme vyjadriť prenos skutočného derivačného člena, musíme výraz (356) násobiť prenosom parazitného zotrvačného člena s časovou konštantou  $T$ , teda :

$$F_D(s) = -sRC \frac{1}{T_1s + 1} = -\frac{sRC}{T_1s + 1} = -\frac{sT_D}{T_1s + 1}. \quad (357)$$

Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika pretína úroveň 0 dB pri frekvencii  $\omega=1/RC$  a rastie so sklonom 20 dB/dek až po frekvenciu  $\omega_1=1/T_1$ , kde regulátor prestáva derivovať v dôsledku parazitnej zotrvačnosti s časovou konštantou  $T_1$ . Fázová logaritmická frekvenčná charakteristika je v tomto pracovnom rozsahu daná priamkou na úrovni  $+90^\circ$ . Prechodová charakteristika v dôsledku zotrvačnosti vrcholí na hodnote  $RC/T_1$  a klesá so strmou určenou veľkosťou časovej konštanty  $T_1$  (Obr. 121). Derivačný regulátor má pri konštantnom vstupe (t.j. pri nulovej frekvencii, jednosmerný signál) nulový prenos. Vyplýva to ako z priebehu amplitúdovej charakteristiky, tak aj z priebehu prechodovej charakteristiky. Samotný derivačný regulátor nezosilňuje regulačnú odchýlku, a preto musí byť *vždy kombinovaný* s proporcionálnym alebo integračným regulátorom. V tejto kombinácii derivačný regulátor *zrýchľuje reguláciu a zvyšuje stabilitu*, čo má veľký význam pre odstránenie krátkodobých a častých porúch. *Nevýhodou derivačného regulátora* ale je, že pri skokovej zmene riadiacej veličiny, teda aj regulačnej odchýlky, generuje veľkú hodnotu akčnej veličiny, ktorú daná energetická sústava nemusí byť schopná dodať. Tým sa dostaneme na hranicu obmedzení a z lineárnej sústavy sa stane nelineárna, pre ktorú už platia iné metódy. To môžeme odstrániť, ak do série s D regulátorom umelo zaradíme doplňujúcu zotrvačnosť prvého alebo aj vyššieho rádu s vhodnými časovými konštantami a jednotkovým statickým prenosom. Tým sa zmierni počiatočná veľkosť akčnej veličiny a zabránime aj uvedeným možným následkom.

V ďalšej časti sa zameriame na kombinácie základných typov regulátorov, ktoré umožňujú dosiahnuť vyššiu kvalitu ako samotné jednoduché regulátory. Tieto kombinované regulátory je v podstate možné realizovať tromi spôsobmi ich zapojenia :

- a) *paralelné zapojenie* východných typov jednoduchých regulátorov (Obr. 122), ktorým sa dosahujú najlepšie výsledky ale za cenu vyššieho počtu zosilňovačov;

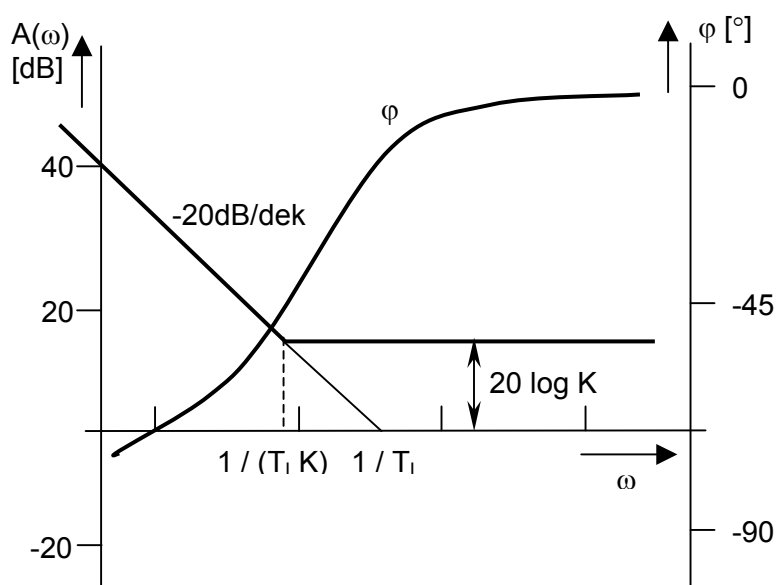


Obr. 122 : Paralelné zapojenie základných typov regulátorov

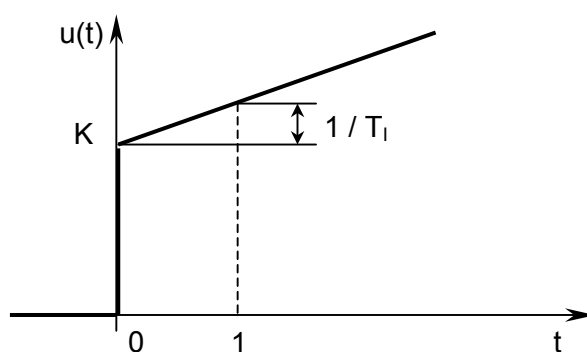
- b) *použitie korekčných členov* – využíva spravidla len jeden zosilňovač, kvalita je však nižšia;  
 c) *spätnoväzobné zapojenie* – využíva spravidla tiež len jeden zosilňovač, kvalita je však vyhovujúca. Nevýhodou ale je, že na nastavovanie rôznych konštant regulátora sa používajú tie isté prvky, čo niekedy spôsobuje vzájomné ovplyvňovanie konštant a môže to aj znemožniť použitie daného regulátora.

Elektronická verzia *proporcionálne integračného regulátora PI* vznikne paralelným spojením regulátora P a regulátora I (Obr. 122), kde  $K$  je Laplaceov obrazový prenos regulátor P a  $K_v$  je rýchlostná konštanta regulátora I. Niekedy sa zavádza tzv. *integračná časová konštanta*  $T_I = RC = 1/K_v$ . Na základe algebry prenosov potom pre výsledný obrazový prenos PI regulátora platí :

$$F_{PI}(s) = K + \frac{K_v}{s} = K + \frac{1}{T_I s}. \quad (358)$$



Obr. 123 : Frekvenčné charakteristiky PI regulátora



Obr. 124 : Prechodová charakteristika PI regulátora

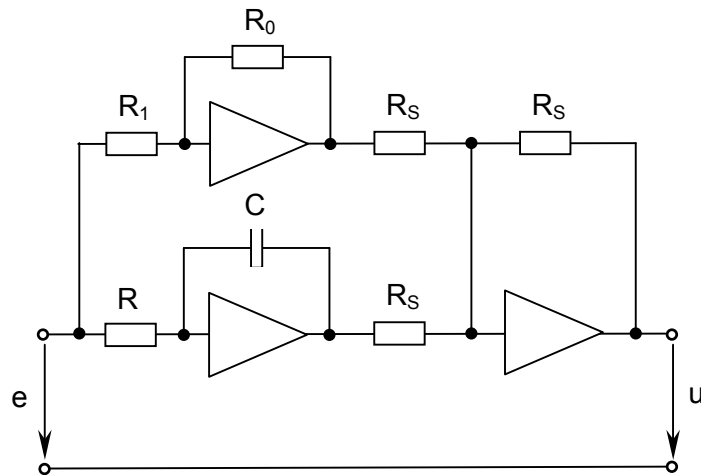
Výsledné logaritmicke frekvenčné charakteristiky PI regulátora sú na Obr. 123 a prehľadne aj s rôznymi parazitnými zotrvačnosťami na Obr. 132. Pokračujúca amplitúdová charakteristika pretína úroveň 0 dB pri frekvencii, keď amplitúda prenosu je rovná jednej, teda pri  $\omega_0 = K_v$ . Zlom charakteristiky je daný priesečníkom integračnej vetvy so sklonom  $-20$  dB/dek a proporcionálnej vetvy na úrovni  $20 \log K$ . K tomu dochádza pri frekvencii :

$$\omega_1 = \frac{K_v}{K} = \frac{1}{K T_I}. \quad (359)$$

Prechodová charakteristika (Obr. 124, Obr. 132) vznikne súčtom prechodových charakteristík oboch dielčích regulátorov. Princiálne elektronické zapojenie PI regulátora je na Obr. 125. Súčet signálov sa realizuje v invertujúcom sumátore, ktorý sa skladá z troch rovnakých odporov  $R_s$  a z invertujúceho zosilňovača. Výstupný signál  $u$  je potom daný rovnicou :

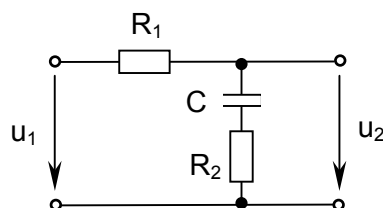
$$u = -(y_1 + y_2), \quad (360)$$

kde  $y_1$  a  $y_2$  sú výstupné signály dvoch dielčích regulátorov. Sumátor musí byť invertujúci preto, lebo dielčie regulátory sú tiež vytvorené z invertujúcich zosilňovačov a tiež obracajú fázu o  $180^\circ$ . Ak požadujeme, aby invertujúci sumátor zosilňoval napríklad desaťkrát, zväčšíme odpor jeho spätnoväzobného odporu tiež desaťkrát, takže jeho veľkosť bude  $10 R_s$ . Pri vysokých frekvenciách má kondenzátor zanedbateľnú impedanciu, a preto sa neuplatňuje.



Obr. 125 : Zapojenie PI regulátora

V niektorých prípadoch postačí zjednodušený PI regulátor, u ktorého je integračná zložka nahradená zotrvačnosťou s veľkou časovou konštantou  $T$ . Použije sa pasívny korekčný člen (Obr. 126) v spojení s neinvertujúcim zosilňovačom.



Obr. 126 : Korekčný člen pre zjednodušený PI regulátor

Prenos proporcionálnej časti člena je potom daný prenosom odporového deliča :

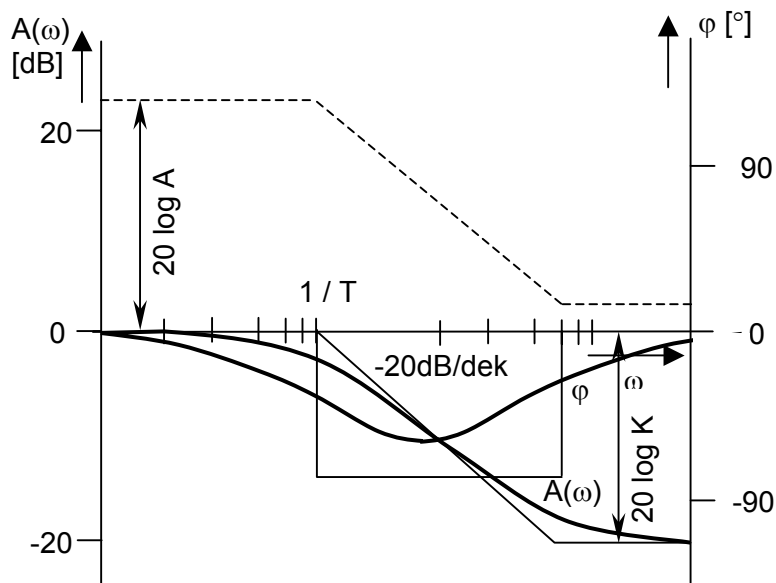
$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (361)$$



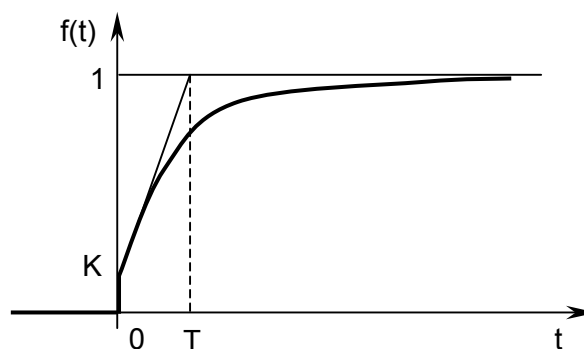
Hodnoty odporov zvolíme tak, aby prenos  $K$  bol v intervale  $1/20$  až  $1/5$ . Pri nízkych frekvenciách sa uplatňuje aj kondenzátor, ktorý vytvára s oboma odpormi zotrvačný člen s časovou konštantou :

$$T = (R_1 + R_2) C . \quad (362)$$

Logaritmicke frekvenčne charakteristiky korekčného člena sú na Obr. 127. Čiarkovane je nakreslená amplitúdová charakteristika takého regulátora po doplnení korekčného člena (Obr. 126) zosilňovačom so zosilnením  $A$ . Na Obr. 128 je zobrazená prechodová charakteristika. Ak porovnáme tieto charakteristiky s charakteristikami dokonalého PI regulátora, potom vidíme, že amplitúda prenosu nedosahuje pri zjednodušenom regulátore pre frekvenciu  $\omega=0$  nekonečnú veľkosť, takže tento regulátor neodstraňuje úplne trvalú regulačnú chybu  $e$ , ale ju len oproti samotnému P regulátoru trochu viacej potláča.



Obr. 127 : Logaritmicke frekvenčne charakteristiky korekčného člena a PI regulátora



Obr. 128 : Prechodová charakteristika korekčného člena PI

Proporcionálne integračný regulátor PI je možné vytvoriť aj spätnoväzobným zapojením. Na Obr. 129 je zosilňovač so zápornou spätnou väzbou. V spätnej vetve je zapojený člen, ktorý má pre nízke frekvencie charakter derivačného člena a pre vysoké frekvencie má proporcionálny charakter. Pretože je tento člen

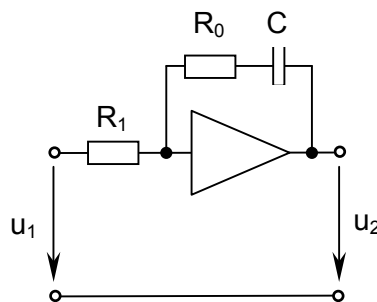
v spätnej väzbe zosilňovača, bude mať celý obvod opačný – teda proporcionálne integračný charakter. Prenos tohto regulátora je daný vzťahom :

$$F_{PI}(s) = - \left( K + \frac{K_v}{s} \right), \quad (363)$$

kde pre K a  $K_v$  platí :

$$K = \frac{R_0}{R_1}, \quad K_v = \frac{1}{R_0 C}. \quad (364)$$

Aby sme vylúčili vzájomnú interakciu, nastavujeme proporcionálnu konštantu K zmenou odporu  $R_1$  a konštantu  $K_v$  zmenou kapacity kondenzátora C.



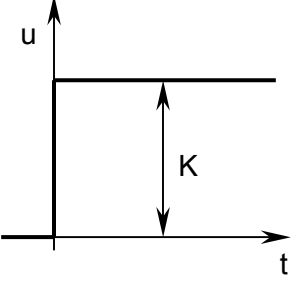
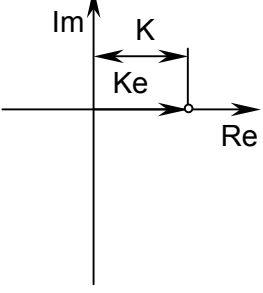
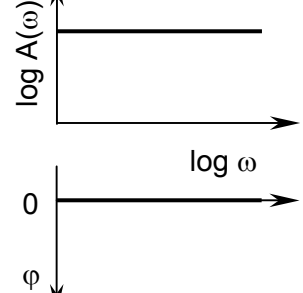
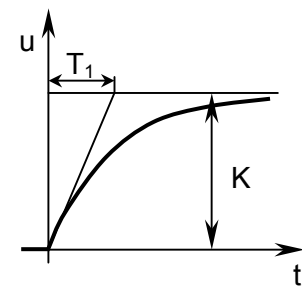
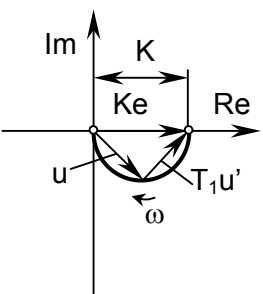
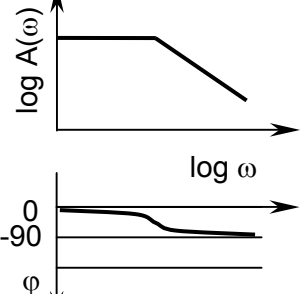
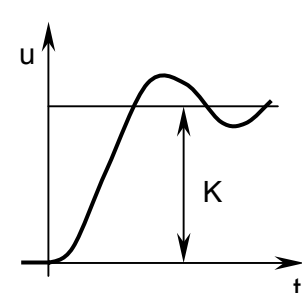
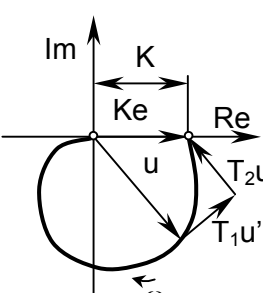
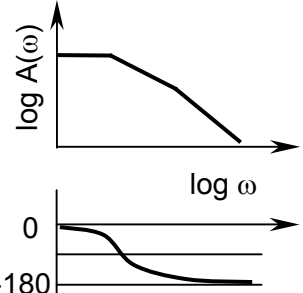
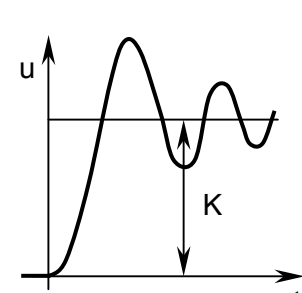
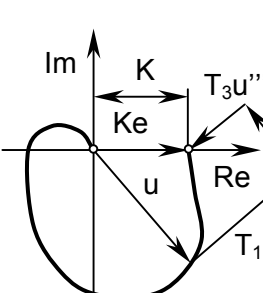
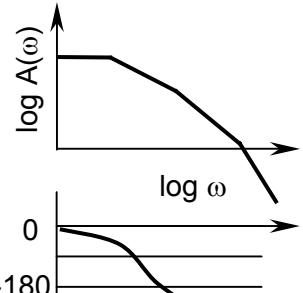
Obr. 129 : Spätnoväzobný PI regulátor

Podobné zapojenia a ich charakteristiky je možné vytvárať aj pre PD a PID regulátor. Obrazové prenosi a dynamické charakteristiky ideálnych aj reálnych PD a PID regulátorov sú uvedené na Obr. 133 a na Obr. 134. V nasledujúcom si ešte objasníme rozdiel medzi ideálnym a reálnym regulátorom.

Činnosť lineárnych regulátorov (ústredných regulačných členov) môžeme matematicky popísať nasledujúcou rovnicou :

$$\dots T_2 u''(t) + T_1 u'(t) + u(t) = Ke(t) + T_D e'(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt. \quad (365)$$

kde  $e(t)$  je vstupná veličina do regulátora, teda regulačná odchýlka a  $u(t)$  je výstup z regulátora, teda tzv. akčná veličina. Pravá strana tejto rovnice vyjadruje funkčné členy regulátorov s časovými konštantami  $T_1$ ,  $T_2$ , ..., atď. Ľavá strana vyjadruje oneskorujúce členy ústredných členov regulátorov (tzv. parazitné zotrvačnosti). Pre ideálny regulátor by na ľavej strane bola len výstupná veličina  $u(t)$  bez derivácií, teda aj bez oneskorenia. Každý regulátor je však vytvorený z určitých konkrétnych reálnych prvkov, ktoré ovplyvňujú cez neho prechádzajúce signály tak, že spôsobujú ich určité oneskorenie. Tým sa na výstup regulátora dostáva signál, ktorý zodpovedá požadovanej funkcii dynamického spracovania vstupného signálu, ale je skreslený voči priebehu na ideálnom regulátore, čo vystihuje ľavá časť uvedenej rovnice. Na Obr. 130, Obr. 131, Obr. 132, Obr. 133 a Obr. 134 sú uvedené charakteristiky ideálnych regulátorov a charakteristiky reálnych regulátorov s oneskorením prvého až tretieho rádu.

CHARAKTERISTIKA PROPORCIONÁLNEHO REGULÁTORA			
Prenos	Prechodová charakteristika	Frekvenčná charakteristika	Logaritmická frekvenčná charakteristika
$F(s) = K$			
$F(s) = \frac{K}{1+T_1s}$			
$F(s) = \frac{K}{1+T_1s+T_2s^2}$			
$F(s) = \frac{K}{1+T_1s+T_2s^2+T_3s^3+\dots}$			

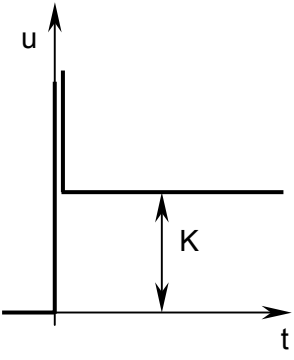
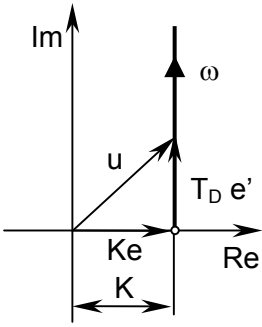
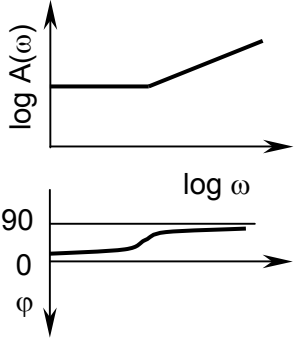
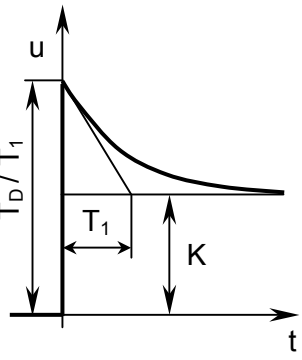
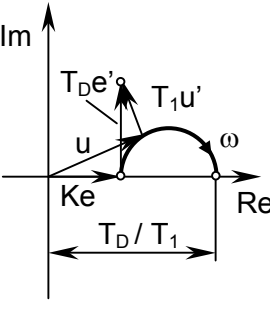
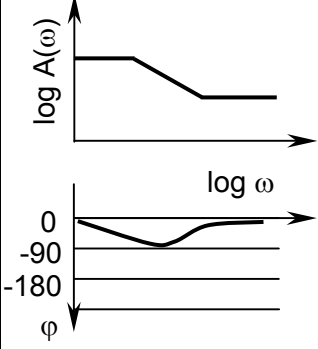
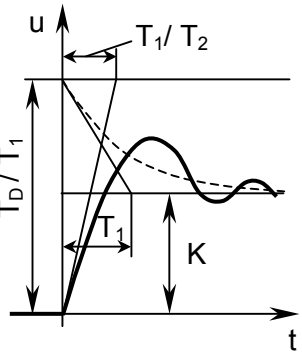
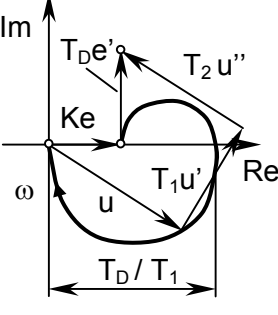
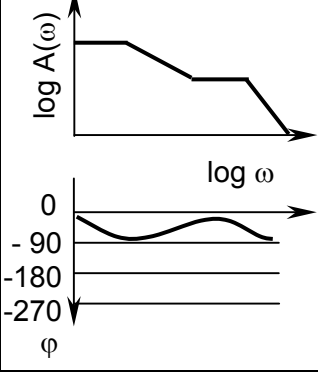
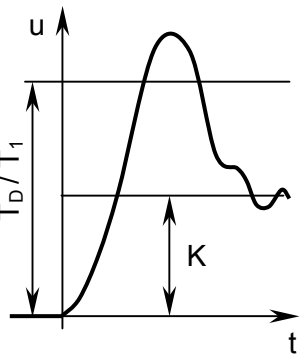
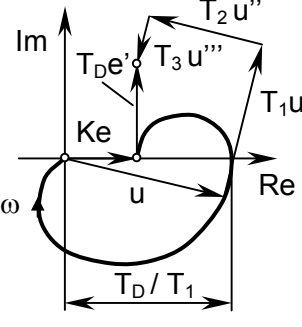
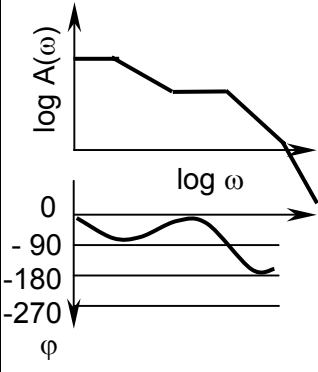
Obr. 130 : Charakteristiky ideálneho a reálneho P regulátora

CHARAKTERISTIKA INTEGRAČNÉHO REGULÁTORA			
Prenos	Prechodová charakteristika	Frekvenčná charakteristika	Logaritmická frekvenčná charakteristika
$F(s) = \frac{1}{T_I s}$			
$F(s) = \frac{1}{T_I s + 1}$			
$F(s) = \frac{1}{T_I s + T_2 s^2 + 1}$			
$F(s) = \frac{1}{T_I s + T_2 s^2 + T_3 s^3 + \dots}$			

Obr. 131 : Charakteristiky ideálneho a reálneho / regulátora

CHARAKTERISTIKA PROPORCIONÁL. INTEGRAČNÉHO REGULÁTORA			
Prenos	Prechodová charakteristika	Frekvenčná charakteristika	Logaritmická frekvenčná charakteristika
$F(s) = K + \frac{1}{T_I s}$			
$F(s) = \frac{K + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_I s}$			
$F(s) = \frac{K + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_1 s + T_2 s^2}$			
$F(s) = \frac{K + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_1 s + T_2 s^2 + T_3 s^3 + \dots}$			

Obr. 132 : Charakteristiky ideálneho a reálneho PI regulátora

CHARAKTERISTIKA PROPORCIONÁL. DERIVAČNÉHO REGULÁTORA			
Prenos	Prechodová charakteristika	Frekvenčná charakteristika	Logaritmická frekvenčná charakteristika
$F(s) = K + T_D s$			
$F(s) = \frac{K + T_D s}{1 + T_1 s}$			
$F(s) = \frac{K + T_D s}{1 + T_1 s + T_2 s^2}$			
$F(s) = \frac{K + T_D s}{1 + T_1 s + T_2 s^2 + T_3 s^3 + \dots}$			

Obr. 133 : Charakteristiky ideálneho a reálneho PD regulátora

CHARAKTERISTIKA PROPORC. INTEGRAČ. DERIVAČ. REGULÁTORA			
Prenos	Prechodová charakteristika	Frekvenčná charakteristika	Logaritmická frekvenčná charakteristika
$F(s) = K + T_D s + \frac{1}{T_I s}$			
$F(s) = \frac{K + T_D s + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_I s}$			
$F(s) = \frac{K + T_D s + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_1 s + T_2 s^2}$			
$F(s) = \frac{K + T_D s + \frac{1}{T_I s}}{1 + T_1 s + T_2 s^2 + T_3 s^3 + \dots}$			

Obr. 134 : Charakteristiky ideálneho a reálneho PID regulátora

### 2.4.4.3 Vplyv regulátora na vlastnosti regulačného obvodu

Ako už bolo uvedené, cieľom použitia regulátora je prispôbiť prenosové vlastnosti regulačného obvodu tvoreného sústavou a regulátorom požiadavkám, ktoré vyplývajú z prevádzkových podmienok. Zavedením regulátora sa menia prenosové vlastnosti regulačného obvodu a našou úlohou je posúdiť tieto zmeny podľa nárokov kladených na priebeh regulačného pochodu.

Často sa napr. z hľadiska prevádzkových podmienok stretávame s požiadavkou čo najmenších zmien regulovanej veličiny od žiadanej hodnoty, bez ohľadu na dĺžku trvania regulačného pochodu. Inokedy si zasa môžeme dovoliť väčšie odchýlky regulovanej veličiny od žiadanej hodnoty pri dodržaní čo najkratšej doby regulačného pochodu. Vo väčšine prípadov je však potrebné určiť také parametre regulátora, aby regulačný pochod bol optimálny, t.j. aby pri malých odchýlkach regulovanej veličiny od žiadanej hodnoty bol regulačný pochod čo najkratší. To je úloha optimalizácie regulačného pochodu, pričom musíme vopred poznať kritériá, podľa ktorých rozhodujeme, aké vlastnosti regulačného pochodu podmieňujú jeho optimálnosť. O tejto problematike sme sa zmienili už aj v časti 2.4.4.1 - Kritériá kvality regulačného pochodu.

Všimnime si teraz, ako sa budú meniť prenosové vlastnosti regulačného obvodu, keď regulovanú sústavu budeme ovplyvňovať v spätnoväzobnom zapojení prostredníctvom niektorého typu regulátora, uvedeného už v predošlých častiach.

Ako je už známe z časti týkajúcej sa algebry prenosov, obrazový prenos regulovanej sústavy v antiparalelnom zapojení regulátora (Obr. 57) je vzhľadom na poruchovú veličinu pri súhlasnom mieste vstupu akčnej veličiny a poruchy daný vzťahom :

$$F_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_S(s)F_R(s)} \quad (366)$$

Na výsledný prenos vplýva teda prenos regulovanej sústavy, aj prenos regulátora.

#### *Vplyv proporcionálneho regulátora na vlastnosti regulačného obvodu*

Nech je v zápornej spätnej väzbe k regulovanej sústave pripojený obrazový prenos ideálneho proporcionálneho regulátora :

$$F_{RP}(s) = K \quad (367)$$

a prenos regulovanej sústavy nech je :

$$F_S(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (368)$$

Potom po pripojení regulátora bude prenos uzavretého regulačného obvodu daný podľa rovnice (366) nasledujúcim vzťahom :

$$F_Z(s) = \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} K} = \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + (a_0 + K)} \quad (369)$$

Jeho limita pre čas  $t \rightarrow \infty$ , teda pre  $s \rightarrow 0$  bude :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \frac{1}{a_0 + K} \quad (370)$$



Pretože obrazový prenos má pre  $s \rightarrow 0$  konečnú a nenulovú hodnotu, bude mať aj originál pre  $t \rightarrow \infty$  tiež konečnú a nenulovú hodnotu, hoci prenos poruchy by sa mal v ideálnom prípade rovnať nule. Proporcionálny regulátor teda nikdy neodstráni trvalú regulačnú odchýlku, ktorá bude síce tým menšia, čím bude väčšie zosilnenie regulátora  $K$ , ale toto zase nemôžeme ľubovoľne zväčšovať vzhľadom na udržanie stability regulačného obvodu.

Všimnime si ďalej, ako ovplyvní P regulátor prechodové deje pri antiparalelnom pripojení na regulovanú sústavu prvého, druhého a tretieho rádu.

a) Nech regulovaná sústava je popísaná diferenciálnou rovnicou prvého rádu v tvare :

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t). \quad (371)$$

Jej obrazový prenos je :

$$F_S(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0}. \quad (372)$$

Riešením uvedenej diferenciálnej rovnice pre konštantné  $u(t)=1$  dostaneme :

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left( 1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \right). \quad (373)$$

kde  $\frac{a_1}{a_0} = T$  je časová konštanta sústavy.

Ak k tejto sústave pripojíme P regulátor so zosilnením  $K$  a s obrazovým prenosom (367), dostaneme pre uzavretý regulačný obvod nasledujúci prenos :

$$F_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_S(s)F_{RP}(s)} = \frac{\frac{1}{a_1 s + a_0}}{1 + \frac{1}{a_1 s + a_0} K} = \frac{1}{a_1 s + (a_0 + K)}. \quad (374)$$

Podobne pre prenos riadenia platí :

$$F_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_S(s)F_{RP}(s)}{1 + F_S(s)F_{RP}(s)} = \frac{\frac{1}{a_1 s + a_0} K}{1 + \frac{1}{a_1 s + a_0} K} = \frac{K}{a_1 s + (a_0 + K)}. \quad (375)$$

Zo vzťahov (374) a (375) platí :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F_Z(s) = \frac{1}{a_0 + K} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \quad (376)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F_W(s) = \frac{K}{a_0 + K} = \frac{Y(s)}{W(s)} \quad (377)$$

a pre obraz výstupnej veličiny pre oba prípady platí :

$$Y_z(s) = \frac{Z(s)}{a_0 + K} \quad a \quad Y_w(s) = \frac{W(s) K}{a_0 + K}. \quad (378)$$

Teda výstupná veličina  $y_z(t)$  pri vstupe poruchy nikdy nebude úplne nulová a podobne výstupná veličina  $y_w(t)$  sa nikdy nebude presne rovnať požadovanej hodnote.

Zo vzťahu (375) platí :

$$a_1 s Y(s) + (a_0 + K) Y(s) = K W(s), \quad (379)$$

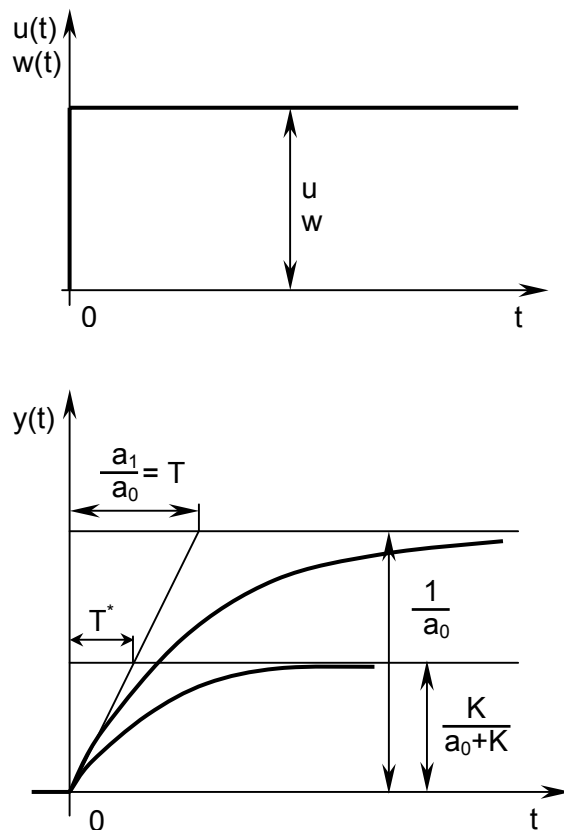
teda diferenciálna rovnica regulačného obvodu je :

$$a_1 y'(t) + (a_0 + K) y(t) = K w(t), \quad (380)$$

a pre  $w(t)=1(t)$  dostaneme jeho nasledujúcu prechodovú charakteristiku :

$$y(t) = \frac{K}{a_0 + K} \left( 1 - e^{-\frac{a_0 + K}{a_1} t} \right). \quad (381)$$

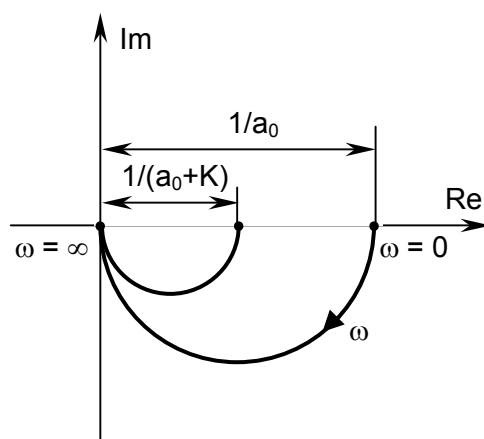
Vzťahy (373) a (381) sú znázornené na Obr. 135. Z obrázku je zrejmé, že po pripojení proporcionálneho regulátora sa ustáli prechodová charakteristika na hodnote  $K/(a_0+K)$ . Tvar prechodovej charakteristiky bude znovu exponenciálny s časovou konštantou  $T^* = a_1/(a_0+K)$ .



7

Obr. 135 : Vplyv proporcionálneho regulátora na výstup regulovanej sústavy

Po dosadení za  $s=i\omega$  do vzťahov (372) a (374) dostaneme Nyquistove komplexné frekvenčné charakteristiky regulovanej sústavy a regulačného obvodu (Obr. 136).



Obr. 136 : Frekvenčné charakteristiky sústavy a regulačného obvodu s P regulátorom

b) Pre sústavu druhého rádu popísanú diferenciálnou rovnicou v tvare :

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t), \quad (382)$$

resp. obrazovým prenosom :

$$F_S(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (383)$$

alebo

$$F_S(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (384)$$

dostaneme po pripojení P-regulátora s prenosom :

$$F_{RP}(s) = K \quad (385)$$

prenos uzavretého regulačného obvodu v tvare :

$$F_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_S(s)F_{RP}(s)} = \frac{\frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + (1 + K)} \quad (386)$$

Charakter tohoto prenosu závisí od koreňov charakteristickej rovnice :

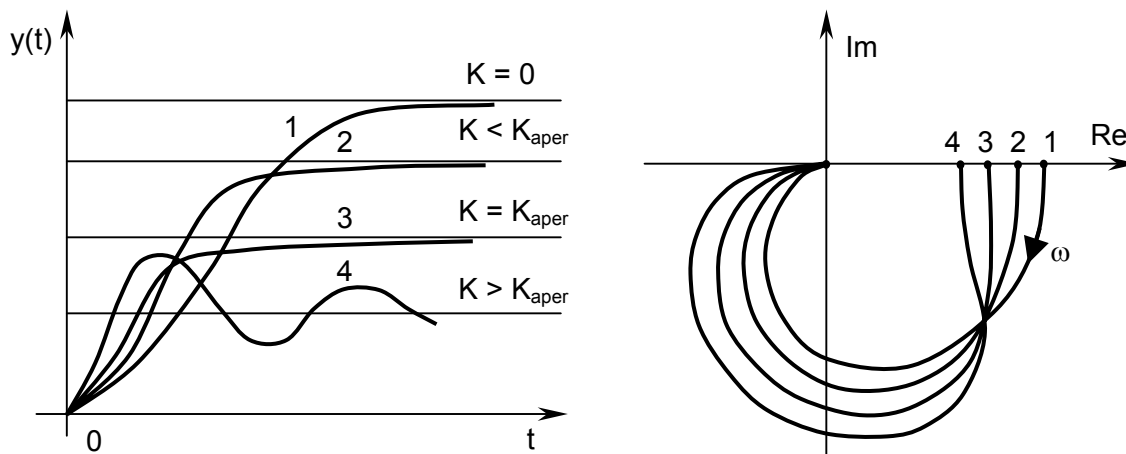
$$T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + (1 + K) = 0, \quad (387)$$

ktoré sú :

$$s_{1,2} = -\frac{(T_1 + T_2) \pm \sqrt{(T_1 + T_2)^2 - 4T_1 T_2 (1 + K)}}{2T_1 T_2}. \quad (388)$$

Zo tohto vzťahu je zrejmé, že proporcionálny regulátor sa u sústavy druhého rádu prejaví tak, že mení samotný charakter prenosu. Pokiaľ je sústava stabilná, zosilnenie  $K$  je malé a korene  $s_{1,2}$  sú reálne rôzne, nemení sa charakter aperiodického priebehu prechodového javu. Pri rastúcom zosilnení  $K$  však nastáva

stav, kedy pri nulovom diskriminante dostaneme dvojnásobné korene, čo je stav na hranici aperiodicity. Pri ďalšom zvýšení  $K$  nadobúda prechodový dej kmitavý charakter pri konštantnom tlmení (rovnom tlmeniu na medzi aperiodicity), ktoré sa už s rastúcim  $K$  nemení. Z toho vyplýva, že stabilná sústava druhého rádu nemôže prejsť vplyvom proporcionálneho regulátora do nestabilnej oblasti. Prechodové charakteristiky a frekvenčné charakteristiky otvoreného regulačného obvodu pre spomínané možnosti sú znázornené na Obr. 137.



Obr. 137 : Prechodové a frekvenčné charakteristiky sústavy 2. rádu s P regulátorom

c) Sústava tretieho rádu popísaná diferenciálnou rovnicou v tvare :

$$a_3 y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t), \quad (389)$$

a obrazovým prenosom :

$$F_S(s) = \frac{1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (390)$$

Po pripojení proporcionálneho regulátora s prenosom :

$$F_{RP}(s) = K \quad (391)$$

dostaneme pre prenos poruchy na vstupe do sústavy vzťah :

$$F_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_S(s)}{1 + F_S(s)F_{RP}(s)} = \frac{1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + (a_0 + K)} \quad (392)$$

Aj v tomto prípade závisí priebeh regulovanej veličiny od zosilnenia proporcionálneho regulátora  $K$ , ako v predchádzajúcom prípade, ale na rozdiel od sústavy druhého rádu bude sa meniť v závislosti od  $K$  nielen frekvencia kmitov, ale aj činiteľ tlmenia. Môžeme sa o tom presvedčiť napr. tak, že budeme vyšetrovať, aké veľké má byť zosilnenie  $K$ , aby obvod bol na hranici stability. Tento stav nastane vtedy, keď charakteristická rovnica zo vzťahu (392) v tvare :

$$s^3 + \frac{a_2}{a_3} s^2 + \frac{a_1}{a_3} s + \frac{a_0 + K}{a_3} = 0 \quad (393)$$

bude mať okrem jedného reálneho koreňa  $s_1 = -\alpha$  ešte dvojicu rýdzo imaginárnych koreňov  $s_{1,2} = \pm i\omega$ . Predošlú charakteristickú rovnicu môžeme potom prepísať v tvare súčinu koreňových činiteľov :

$$(s + \alpha)(s + i\omega)(s - i\omega) = 0 \quad (394)$$

alebo v tvare :

$$s^3 + \alpha s^2 + \omega^2 s + \omega^2 \alpha^2 = 0 \quad (395)$$

Pretože rovnice (393) a (395) predstavujú dve rôzne formy tej istej rovnice, musia byť teda navzájom rovné a musia sa rovnať aj ich koeficienty pri rovnakých mocninách  $s$ . Teda platí :

$$\alpha = \frac{a_2}{a_3}, \quad \omega^2 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \omega^2 \alpha^2 = \frac{a_0 + K}{a_3} \quad (396)$$

z čoho pre kritické zosilnenie platí :

$$K = K_{krit} = \frac{a_1 \cdot a_2^2}{a_3^2} - a_0 \quad (397)$$

Ak urobíme zo vzťahu (392) frekvenčný prenos a znázorníme ho v Gaussovej rovine komplexných čísel, potom získaná frekvenčná charakteristika, na rozdiel od predošlej sústavy druhého rádu, bude prechádzať už tromi kvadrantmi Gaussovej roviny. Ak by sme urobili frekvenčnú charakteristiku otvoreného regulačného obvodu, bude sa podobne ako na obrázku (Obr. 137) s rastúcim  $K$  posúvať začiatok frekvenčnej charakteristiky k začiatku súradnicového systému po kladnej reálnej osi pre  $\omega=0$ . Tým sa však zväčšuje aj úsek na zápornej časti reálnej osi a až pri  $K_{krit}$  môže tento úsek dosiahnuť kritickú hodnotu  $(-1, i0)$ , čo svedčí podľa Nyquistovho kritéria stability, že uzavretý regulačný obvod s týmto zosilnením je na hranici stability.

#### *Vplyv integračného regulátora na vlastnosti regulačného obvodu*

Keď pripojíme k regulovanej sústave s prenosom (368) v spätnoväzobnom zapojení ideálny integračný regulátor s prenosom :

$$F_{RI}(s) = \frac{1}{T_I s} \quad (398)$$

bude prenos poruchy pôsobiacej na vstupe do sústavy :

$$F_z(s) = \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{T_I s}{1 + \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{T_I s}} = \frac{T_I s}{T_I s (a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) + 1} \quad (399)$$

Trvalá regulačná odchýlka pri pôsobení poruchy na vstupe regulovanej sústavy, vyplývajúca z limity predošlého vzťahu, je :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F_z(s) = 0, \quad (400)$$

čo potvrdzuje, že integračný regulátor umožňuje doceliť nulovú regulačnú odchýlku. V ďalšom opäť analyzujeme, ako bude integračný regulátor ovplyvňovať prechodové deje. Nech regulovaná sústava je popísaná diferenciálnou rovnicou prvého rádu v tvare :

$$T y'(t) + y(t) = u(t) \quad (401)$$

a jej obrazový prenos je :

$$F_s(s) = \frac{1}{T s + 1} \quad (402)$$

Potom bude prenos poruchy pôsobiacej na vstupe do sústavy :

$$F_z(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{T_1s}} = \frac{T_1s}{T T_1 s^2 + T_1 s + 1} \quad (403)$$

Charakter prechodového deja bude znovu závisieť od koreňov charakteristickej rovnice :

$$T T_1 s^2 + T_1 s + 1 = 0, \quad (404)$$

ktoré sú :

$$s_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4TT_1}}{2TT_1} = -\frac{1}{2T} \pm \frac{1}{2T} \sqrt{1 - \frac{4T}{T_1}}. \quad (405)$$

Pretože vo výraze pod odmocninou sa vyskytuje aj integračná časová konštanta regulátora, je zrejmé, že integračný regulátor zapojený v spätnej väzbe k sústave prvého rádu mení samotný charakter prechodového deja podľa toho, aké hodnoty nadobúda integračná časová konštanta. Pri dostatočne intenzívnom účinku integračného regulátora, t.j. pri malej hodnote  $T_1$ , môže prenos takého regulačného obvodu nadobudnúť kmitavý charakter, pretože pri hodnote  $T_1 < 4T$  dostaneme komplexne združené korene charakteristickej rovnice v tvare :

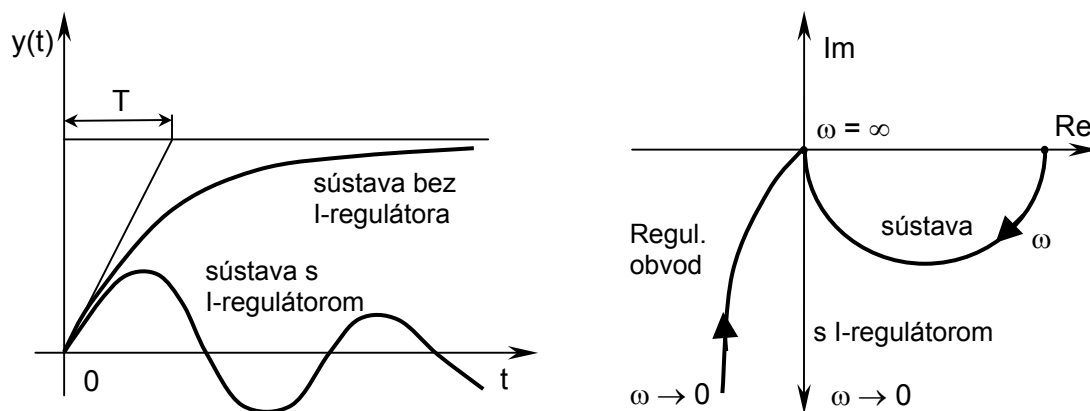
$$s_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm i\omega \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{4T}{T_1} - 1}. \quad (406)$$

Prakticky sa vyskytujúce regulované sústavy majú pomerne veľkú časovú konštantu  $T$ , preto pri použití integračného regulátora v spätnej väzbe sa často stretávame s kmitavým prechodovým priebehom.

Činiteľ tlmenia  $1/(2T)$  nie je ovplyvňovaný prenosom spätnej väzby a je závislý na dvojnásobku časovej konštanty regulovanej sústavy, takže amplitúda kmitov sa pri sústavách s veľkou zotrvačnosťou znižuje len veľmi pomaly.

Ako vyplýva zo vzťahu (403), integračný regulátor zväčšuje rád popisujúcej diferenciálnej rovnice (stupeň charakteristickej rovnice prenosu), čím vlastne *zhoršuje dynamické vlastnosti* regulačného obvodu. Má však *ideálne statické vlastnosti*, pretože v prípade poruchy nepripúšťa v ustálenom stave žiadnu trvalú regulačnú odchýlku regulovanej veličiny.

Prechodová a frekvenčná charakteristika sústavy prvého rádu s integračným regulátorom je znázornená na Obr. 138.



Obr. 138 : Prechodové a frekvenčné charakteristiky sústavy 1. rádu a s I regulátorom

Z frekvenčnej charakteristiky znázornenej na Obr. 138 je zrejme, že obvod vytvorený statickou sústavou prvého rádu a integračným regulátorom je stabilný pri akejkolvek hodnote integračnej časovej konštanty  $T_I$ . Nie je možné to však už tvrdiť pre sústavu druhého a vyššieho rádu, u ktorých pri určitej hodnote  $T_I$  nastáva stav na hranici stability. U sústavy druhého rádu integračný regulátor už posúva frekvenčnú charakteristiku rozpojeného obvodu do tretieho kvadrantu a s ohľadom na Nuyquistovo kritérium stability môže už pri určitej hodnote  $T_I$  táto prechádzať cez kritický bod  $(-1, i0)$  na zápornej časti reálnej osi.

### Vplyv derivačného regulátora na vlastnosti regulačného obvodu

Pripojme teraz k regulovanej sústave s prenosom (368) v spätnoväzobnom zapojení ideálny derivačný regulátor s prenosom :

$$F_{RD}(s) = T_D s . \quad (407)$$

Pri spätnoväzobnom zapojení dostaneme pre prenos poruchy pôsobiacej na vstupe do sústavy vzťah :

$$F_z(s) = \frac{1}{1 + \frac{T_D s}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}} = \frac{1}{a_n s^n + \dots + (a_1 + T_D) s + a_0} . \quad (408)$$

Trvalá regulačná odchýlka pri pôsobení poruchy na vstupe regulovanej sústavy, vyplývajúca z limity predošlého vzťahu, je :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F_z(s) = \frac{1}{a_0} , \quad (409)$$

čo znamená, že derivačný člen neumožňuje dosiahnuť nulovú regulačnú odchýlku, dokonca ani neovplyvňuje konečnú hodnotu ustáleného stavu, teda nezabezpečuje vynútenú zložku regulovanej veličiny, čo je neprípustné. Naproti tomu však mení konštantu pri prvej derivácii, čo fyzikálne predstavuje zmenu koeficientu tlmenia (odporu). Pri rastúcej hodnote  $T_D$  sa tlmenie zväčšuje a urýchľuje ukončenie regulačného pochodu.

V ďalšej časti analyzujeme na sústavách prvého a druhého rádu, ako derivačný regulátor ovplyvní charakter prechodových dejov v regulačnom obvode.

a) Nech regulovaná sústava je prvého rádu s obrazovým prenosom v tvare :

$$F_S(s) = \frac{1}{T_S s + 1} \quad (410)$$

a s prenosom derivačného regulátora :

$$F_{RD}(s) = T_D s . \quad (411)$$

Pre prenos poruchy pôsobiacej na vstupe do sústavy platí vzťah :

$$F_z(s) = \frac{1}{(T_D + T) s + 1} = \frac{1}{T^* s + 1} , \quad (412)$$

kde  $T^* = T_D + T$

Zo vzťahu (412) vyplýva, že derivačný regulátor pripojený v spätnoväzobnom regulačnom obvode na statickú sústavu prvého rádu ovplyvňuje dynamiku regulačného obvodu v tom zmysle, že zväčšuje časovú konštantu sústavy, čo má za následok, že prechodový dej trvá dlhšie ako bez regulátora, regulovaná veličina sa ku svojej ustálenej hodnote blíži pomalšie, teda derivačný regulátor má tlmiace účinky.

- b) V predošlom bode spomínané tlmiace účinky sa výrazne prejavajú, ak napríklad pripojíme na statickú sústavu druhého rádu s obrazovým prenosom :

$$F_s(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (413)$$

proporcionálny regulátor s prenosom (411). Potom pre prenos poruchy pôsobiacej na vstupe do sústavy platí vzťah :

$$F_z(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + (a_1 + T_D) s + a_0} \quad (414)$$

Charakter prechodového deja bude znovu závisieť od koreňov charakteristickej rovnice :

$$s^2 + \frac{a_1 + T_D}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2} = 0, \quad (415)$$

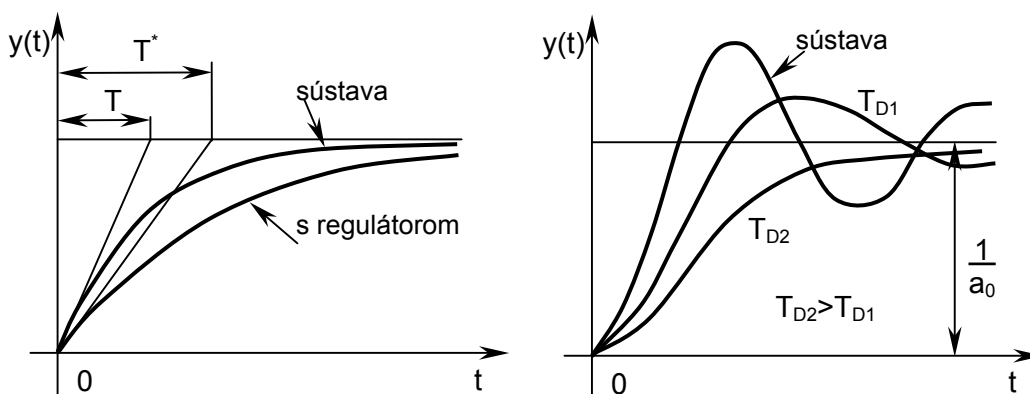
ktoré sú :

$$s_{1,2} = \frac{-(a_1 + T_D) \pm \sqrt{(a_1 + T_D)^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} = -\frac{a_1 + T_D}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 + T_D}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}. \quad (416)$$

Z tohto vzťahu pre výpočet koreňov je vidieť, že za predpokladu komplexne združených koreňov derivačný regulátor zväčšuje reálnu časť týchto koreňov, teda tlmenie regulačného obvodu, a súčasne znižuje frekvenciu kmitania  $\omega$ , ktorá je daná vzťahom :

$$\omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1 + T_D}{2a_2}\right)^2}. \quad (417)$$

Spomínané vplyvy derivačného regulátora sú zrejmé aj z prechodových charakteristík pre sústavu prvého a druhého rádu, ktoré sú znázornené na Obr. 139.



Obr. 139 : Vplyv derivačného regulátora na sústavu prvého a druhého rádu

Podobným postupom by sme mohli vyriešiť aj vplyv kombinovaných typov regulátorov (PI, PD, PID) na regulačný pochod. Vlastnosti kombinovaných typov regulátorov sú pritom dané súčtovými vlastnosťami základných typov regulátorov P, I, D.



#### 2.4.4.4 Použitie regulátorov

Ako už bolo uvedené, vlastnosti regulátorov určujú kvalitu regulácie. Pri voľbe regulátora je potrebné prihliadať aj na prenosové vlastnosti regulovanej sústavy. Cieľom je, aby sa prenos riadenia v čo najširšom frekvenčnom pásme blížil k jednotke a prenos poruchy k nule. Na tomto princípe robíme návrh (syntézu) konkrétneho regulačného obvodu, ak už poznáme prenosové vlastnosti regulovanej sústavy, teda po identifikácii sústavy. Syntézu je možné robiť čisto matematicky na základe blokovej algebry alebo túto metódu kombinujeme s grafickou syntézou, najlepšie pomocou logaritických frekvenčných charakteristík alebo tiež modelovaním na počítači.

##### Použitie proporcionálneho regulátora

*Proporcionálny regulátor* patrí k základným a aj k najpoužívanejším regulátorom, lebo je najjednoduchší. Presnosť regulácie závisí od jeho zosilnenia, ktoré môže byť u zotrvačných regulovaných sústav veľké bez toho, aby hrozila nestabilita. Pri sústavách vyšších rádov, kde je doba prieťahu  $T_u$  menšia ako desatina doby nábehu  $T_n$ , je niekedy na závalu prekmitnutie regulovanej veličiny. Prekmitnutie je možné zmenšiť zmenšením zosilnenia regulátora, to však má za následok zväčšenie trvalej regulačnej odchýlky. Tento regulátor je vhodný aj pre astatické sústavy, ak je prípustná trvalá regulačná odchýlka. Zosilnenie regulátora môže byť veľké bez toho, aby hrozila nestabilita alebo prekmitnutie regulovanej veličiny.

Proporcionálne regulátory *nie sú vhodné* pre regulované sústavy bez zotrvačnosti, lebo už pri malom zosilnení je systém náchylný k vysokofrekvenčnému kmitaniu. Tento nedostatok odstraňujeme umelým zavedením zotrvačnosti do regulovanej sústavy. Napríklad pri stabilizátoroch napätia sa ku záťaži pripája paralelne kondenzátor veľkej kapacity. Na podobné účely slúži aj Boucherotov RC člen na výstupe nízkofrekvenčných zosilňovačov. Ako už bolo uvedené, proporcionálny regulátor nie je vhodný aj pre regulované sústavy vyšších rádov, ktoré majú dobu prieťahu  $T_u$  prevyšujúcu desatinu doby nábehu  $T_n$  danej sústavy, lebo už pri malom zosilnení hrozí rozkmitanie. Rovnaká situácia je aj pri statických sústavách s dopravným spozdením. Lepšia situácia je pri astatických regulovaných sústavách s relatívne krátkou dobou prieťahu, ak nie je na závalu väčšia trvalá regulačná odchýlka a prekmitnutie regulovanej veličiny. Podmienkou je obmedzenie veľkosti zosilnenia regulátora.

##### Použitie integračného regulátora

*Integračný regulátor* samotný alebo aj v kombináciách s inými typmi regulátorov, je regulátorom, ktorý umožňuje úplne odstrániť trvalú regulačnú odchýlku. Jeho základnou nevýhodou je pokles zosilnenia so zvyšujúcou sa frekvenciou, takže takýto regulátor odstraňuje poruchy pomaly.

Integračný regulátor je veľmi vhodný pre statické regulované sústavy bez zotrvačnosti, jeho zosilnenie môže byť veľmi vysoké bez nebezpečia rozkmitania. Je vhodný aj pre zotrvačné sústavy prvého rádu, pri poruche však dochádza k väčšiemu prekmitnutiu regulovanej veličiny. Je najvhodnejším zo všetkých ostatných typov regulátorov pre reguláciu statických sústav s dopravným oneskorením. Pri týchto sústavách najviac hrozí rozkmitanie regulačného obvodu, preto musíme nastaviť menšie zosilnenie regulátora. Tento regulátor je menej vhodný aj pre reguláciu sústav vyšších rádov, kde sa lepšie uplatňuje proporcionálne integračný regulátor. Tiež nie je možné ho používať pre astatické sústavy, lebo regulačný obvod je nestabilný.

##### Použitie proporcionálne derivačného regulátora

Všeobecne je možné konštatovať, že *proporcionálne derivačný regulátor* je vhodný v takých prípadoch, kde je vhodný aj samotný proporcionálny regulátor. Prednosťou kombinovaného PD regulátora je vyššia rýchlosť regulácie, čo sa prejavuje potlačením rýchlych prekmitnutí regulovanej veličiny najmä v takých prípadoch, keď do regulovanej sústavy často vstupujú poruchy. Má väčší prenos na vyšších frekvenciách. Vhodnou voľbou časovej konštanty je možné znížiť rád regulovanej sústavy, a tak zvýšiť stabilitu regulačného obvodu. Trvalú regulačnú odchýlku takýto regulátor tiež neodstraňuje, len ju zmenšuje.

##### Použitie proporcionálne integračného regulátora

*Proporcionálne integračný regulátor* je najrozšírenejším kombinovaným regulátorom, lebo má takmer univerzálne použitie. Pritom nie je veľmi zložitý. Proporcionálne integračné regulátory majú oproti

čisto integračnému regulátoru väčší prenos na vyšších frekvenciách, takže rýchlejšie odstraňujú nárazové poruchy. Ďalším dôvodom pre jeho obľúbenosť sú jeho vlastnosti, ako napr. veľké až úplné potlačenie regulačnej odchýlky, tiež uspokojivé odstraňovanie náhlych porúch a tiež to, že vo väčšine prípadov zlepšuje stabilitu regulačného obvodu. Najviac sa používa pri regulácii kmitavých sústav druhého rádu alebo vyšších rádov. Čím je rád sústavy vyšší, tým viac musíme znižovať zosilnenie, prípadne zväčšovať integračnú časovú konštantu  $T_i$ , teda znižovať rýchlostnú konštantu  $K_v$ . Pre statické sústavy s dopravným spozdením dáva lepšie výsledky čistý integračný regulátor. Pre astatické sústavy, a to aj s dopravným oneskorením, je PI regulátor vhodný tam, kde sa požaduje úplné odstránenie trvalej regulačnej odchýlky, inde je vhodnejší P regulátor.

### Použitie proporcionálne integračne derivačného regulátora

*Proporcionálne integračne derivačný regulátor* je vhodný všade tam, kde vyhovuje PI regulátor, oproti ktorému je PID regulátor rýchlejší, preto lepšie tlmí rýchle prekmitnutia regulovanej veličiny najmä pri častých poruchách vstupujúcich do regulovanej sústavy. Pre vyššiu zložitosť a tiež z dôvodov interakcie pri jednoduchších zapojeniach s korekčným členom a tiež pri zapojení PID regulátora so spätnou sa používa len v už spomenutých odôvodnených prípadoch.

### Použitie regulátorov pre riadenie bežných fyzikálnych veličín

Pre presnú reguláciu teploty je najvhodnejší PI regulátor. V prípade častých porúch, napríklad pri častom otváraní dvierok pecí, je vhodnejší PID regulátor.

Pre reguláciu výšky hladiny, čo je prípad astatickej regulovanej sústavy, najlepšie výsledky dáva PI regulátor. Samotný I regulátor nie je vhodný, lebo obvod je potom nestabilný. Pri menších nárokoch na presnosť regulácie vyhovuje aj P regulátor.

Na reguláciu otáčok je možné použiť regulátor P alebo I, pokiaľ regulovaná sústava nemá veľkú dobu prieťahu  $T_u$  alebo dopravné oneskorenie. Najlepšie výsledky tu dosahuje PI regulátor.

Na reguláciu tlaku plynov sú najvhodnejšie regulátory PI alebo PID. Pri menších nárokoch na presnosť je vhodný aj samotný I regulátor.

Pre reguláciu prietoku kvapalín je najvhodnejší I regulátor.

Pre vlečnú reguláciu a servomechanizmy je najvhodnejší PI regulátor. Regulátor PID sa tu používa v prípade vyšších požiadaviek kvality, lebo zaisťuje rýchlejšiu odozvu.

Uvedené spojité ale aj nespojité regulátory sa vyrábali a vyrábajú ako priemyselné regulátory na vytvorenie celého regulačného reťazca od snímača cez regulátor až po zosilňovač a akčný člen [5], [67], [68]. Konštruovali sa ako skladačky pracujúce či už na elektronickom alebo pneumatickom a aj hydraulickom princípe.

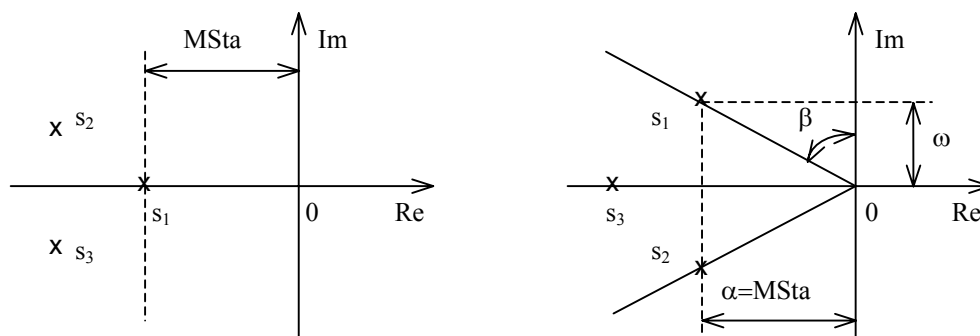
Voľba určitého typu regulátora a nastavenie jeho konštant závisí od viacerých okolností. Najväčšou chybou, ktorej sa môžeme pri tom dopustiť je činnosť regulátora na hranici stability. To má za následok veľké prekmitnutia regulovanej veličiny pri vstupe poruchy alebo pri skokovej zmene riadiacej veličiny. V takomto režime môže dôjsť aj k rozkmitaniu regulačného obvodu, ak sa náhodne alebo vplyvom zmeny okolitej teploty zmení aj prenos niektorého člena regulačného obvodu.

#### 2.4.4.5 Určenie konštant regulátora metódou dominantných koreňov

Priebeh regulovanej veličiny závisí od rozloženia koreňov charakteristickej rovnice regulačného obvodu v komplexnej rovine. Najviac ho ovplyvňujú *dominantné korene*, teda tie, ktoré ležia najbližšie k imaginárnej osi zľava (Obr. 140). Čím je koreň bližšie, tým je jeho reálna časť menšia a jemu zodpovedajúca časová konštant väčšia, teda jemu odpovedajúca zložka riešenia sa uplatňuje dlhší čas a opačne. Vzdialenosť najbližšieho koreňa od imaginárnej osi udáva *mieru stability*  $M_{St}$  (Obr. 140), čo je obdoba doplnku zosilnenia pri Nyquistovom kritériu.

Pre čas trvania regulačného pochodu  $T_{reg}$ , v závislosti od danej miery stability  $M_{St}$  regulačného obvodu, platí nasledujúci vzťah :

$$T_{reg} = (3 \text{ až } 4) / M_{St} . \quad (418)$$



Obr. 140 : Dominantné korene, miera stability a tlmenia

Pár komplexne združených pólů môžeme popísať pomocou *miery tlmenia* :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha}{\omega} = \operatorname{MTI} \quad , \quad \text{kde} \quad s_{1,2} = \alpha \pm i\omega . \quad (419)$$

Úlohou syntézy je navrhnuť regulačný obvod tak, aby priebeh regulovanej veličiny odpovedal dominantnému koreňu alebo páru dominantných koreňov, pričom dominantné korene sa určia z požiadaviek na kvalitu regulačného obvodu. Teda určíme také dominantné korene, ktoré odpovedajú požadovanej miere stability MSta a miere tlmenia MTI. Parametre regulátora nastavíme tak, aby ostatné korene boli od dominantných čo najďalej vľavo.

Teda z požadovanej Msta a MTI určíme dominantné korene uzavretého regulačného obvodu, z ktorých vieme cez súčin koreňových činiteľov určiť aj požadovanú charakteristickú rovnicu uzavretého spätnoväzobného regulačného obvodu. Na základe konkrétneho obrazového prenosu identifikovanej regulovanej sústavy a všeobecného obrazového prenosu (všeobecné konštanty) požadovaného regulátora vieme určiť aj všeobecnú charakteristickú rovnicu tohto regulačného obvodu. Po zabezpečení rovnosti konštánt pri najvyšších mocninách oboch charakteristických rovníc môžeme urobiť porovnanie členov pri nižších mocninách. Tým získame rovnice pre výpočet neznámych parametrov regulátora, ktorý zabezpečí v regulačnom obvode požadovanú mieru stability a mieru tlmenia. Postup si ozrejmieme na nasledujúcich príkladoch.

**Príklad 29** : Pre regulovaný systém s Laplaceovým obrazovým prenosom  $F_s(s)$  podľa nasledujúcej rovnice :

$$F_s(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \quad (420)$$

navrhnete vhodný regulátor a určite jeho parametre tak, aby priebeh regulovanej veličiny pri pôsobení poruchy jednotkového skoku bol kmitavý s mierou stability MSta = 1,5 a s mierou tlmenia MTI = 0,3. Ustálená hodnota regulovanej veličiny nech sa nelíši od jej požadovanej hodnoty o viac ako 5%, teda napríklad v prípade poruchy nech pre zmenu výstupnej veličiny platí  $y(\infty) \leq 5\%$ .

Požiadavke na kmitavý priebeh zodpovedá dvojica komplexne združených koreňov. Aby sme vedeli ovplyvňovať ich hodnoty, potrebujeme regulátor aspoň s dvoma parametrami. Volíme PD regulátor s obrazovým prenosom :

$$F_{RPD}(s) = K + T_D s \quad (421)$$

Pre prenos poruchy uzavretého regulačného obvodu platí :

$$F_z(s) = \frac{1}{s^2 + (T_D + 3)s + 1 + K} \quad (422)$$

odkiaľ môžeme napísať všeobecnú charakteristickú rovnicu tohto regulačného obvodu :

$$s^2 + (T_D + 3) s + 1 + K = 0. \quad (423)$$

Požadovanej MSta a MTI odpovedá dvojica komplexne združených koreňov, ktorú určíme z už uvedených vzorcov nasledovne :

$$\alpha = MSta = 1,5, \quad \omega = \frac{\alpha}{MTI} = \frac{1,5}{0,3} = 5, \quad s_{1,2} = -1,5 \pm 5i$$

Po roznásobení koreňových činiteľov s požadovanými koreňmi  $s_{1,2}$  dostaneme charakteristickú rovnicu :

$$s^2 + 3s + 27,25 = 0. \quad (424)$$

Ak má byť priebeh regulovanej veličiny určený koreňmi  $s_{1,2}$  presne, potom aj všeobecná charakteristická rovnica regulačného obvodu musí mať také koeficienty, aby dávali rovnaké hodnoty koreňov  $s_{1,2}$ , teda musí platiť :

$$s^2 + (T_D + 3) s + (1 + K) = s^2 + 3s + 27,25. \quad (425)$$

Keďže koeficienty na oboch stranách pri najvyšších mocninách  $s$  majú už rovnaké koeficient, porovnaním koeficientov pri ďalších rovnakých mocninách  $s$  dostávame sústavu dvoch lineárnych rovníc pre neznáme parametre regulátora :

$$\begin{aligned} (T_D + 3) &= 3 \\ (1 + K) &= 27,25 \end{aligned} \quad (426)$$

odkiaľ dostávame hodnoty parametrov regulátora  $T_D = 0, K = 26,25$ , ktoré zabezpečia na začiatku zadané požiadavky na kvalitu regulačného pochodu. Pre kontrolu ešte určíme veľkosť trvalej regulačnej odchýlky :

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} F_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + (T_D + 3)s + 1 + K} = \frac{1}{1 + K} = 0,0367 < 0,05$$

alebo

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} F_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 3s + 27,25} = \frac{1}{27,25} = 0,0367 < 0,05, \quad (5\%)$$

Teda dané požiadavky na kvalitu regulačného pochodu môžeme v tomto prípade na zadanej sústave dosiahnuť len s proporcionálnym regulátorom so zosilnením  $K = 26,25$ . Pre osvojenie si metódy doporučujeme čitateľovi urobiť tento výpočet pre MSta = 2, MTI = 0,4 ( $T_D = 1, K = 28$ ).

**Príklad 30 :** Pre regulovaný systém s tým istým prenosom ako v príklade 29 navrhňte vhodný regulátor tak, aby pri pôsobení poruchy jednotkového skoku na vstupe sústavy bola odchýlka regulovanej veličiny  $y(\infty) = 0$  a priebeh regulovanej veličiny  $y(t)$  odpovedal dvojici dominantných koreňov  $s_{1,2} = -1,5 \pm 3,5i$  (určené napr. zo zadanej MSta a MTI).

Vzhľadom na požiadavku  $y(\infty)=0$  musíme voľiť regulátor s integračnou zložkou s prenosom  $F_R(s)=1/(T_I s)$ , čím vzrastie rád prenosu poruchy aj regulovanej veličiny o jednotku ( $s$  je v menovateli), teda charakteristická rovnica regulačného obvodu bude tretieho stupňa, bude mať tri korene.

Podľa požiadaviek na dynamiku obvodu musí charakteristická rovnica obsahovať dvojicu dominantných koreňov  $s_{1,2}$  a jeden reálny záporný koreň  $s_3$ , ktorého hodnota musí byť omnoho väčšia, ako je hodnota reálnej časti koreňov  $s_{1,2}$ . Pre nastavenie troch koreňov musí mať regulátor tri meniteľné parametre, preto volíme PID regulátor s prenosom :

$$F_{RPID}(s) = K + T_D s + \frac{1}{T_I s}. \quad (427)$$

Pre prenos poruchy uzavretého regulačného obvodu platí :

$$F_z(s) = \frac{s}{s^3 + (T_D + 3)s^2 + (1 + K)s + \frac{1}{T_I}}, \quad (428)$$

odkiaľ môžeme napísať všeobecnú charakteristickú rovnicu tohto regulačného obvodu :

$$s^3 + (T_D + 3)s^2 + (1 + K)s + \frac{1}{T_I} = 0. \quad (429)$$

Urobíme delenie tejto charakteristickej rovnice rovnicou danou súčinom koreňových činiteľov dominantnej dvojice koreňov :

$$s^2 + 3s + 14,5 = 0. \quad (430)$$

Uvedené delenie musí byť bezozvyškové, preto zvyšky pri rovnakých mocninách  $s$  postavíme rovné nule, čím získame prvé dve rovnice a z výsledku delenia  $s + (3 + T_D - 3)$  dostaneme tretiu rovnicu pre tretí koreň :

$$\begin{aligned} (1 + K) - 14,5 - 3(3 + T_D - 3) &= 0 \\ \frac{1}{T_I} - 14,5(3 + T_D - 3) &= 0. \end{aligned} \quad (431)$$

$$s_3 + (3 + T_D - 3) = 0$$

Aby bola dodržaná podmienka dominantných koreňov, musí tretí koreň  $s_3$  ležať čo najďalej od koreňov  $s_{1,2}$ , napríklad nech  $s_3 = -10$ , potom z tretej rovnice vypočítame  $T_D = 10$ , z prvej  $K = 43,5$  a z druhej rovnice vypočítame  $T_I = 1/145$ , čím je úloha vyriešená. Pre osvojenie si metódy doporučujeme čitateľovi opäť urobiť tento výpočet pre  $s_{1,2} = -1,5 \pm 5j$ , ( $K = 68$ ,  $T_D = 11$ ,  $T_I = 0,0034$ ).

**Príklad 31** : Pre regulovaný systém s Laplaceovým obrazovým prenosom  $F_s(s)$  podľa nasledujúcej rovnice :

$$F_s(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \quad (432)$$

navrhnete vhodný regulátor a určite jeho parametre tak, aby priebeh regulovanej veličiny pri pôsobení poruchy jednotkového skoku bol kmitavý s mierou stability  $MSt_a = 2$  a s mierou tlmenia  $MTI = 0,4$ . Ustálená hodnota regulovanej veličiny nech sa nelíši od jej požadovanej hodnoty o viac ako 4%, teda napríklad v prípade poruchy nech pre zmenu výstupnej veličiny platí  $y(\infty) \leq 4\%$ .

Požiadavke na kmitavý priebeh zodpovedá dvojica komplexne združených koreňov. Aby sme vedeli ovplyvňovať ich hodnoty, potrebujeme regulátor aspoň s dvoma parametrami. Volíme PD regulátor s obrazovým prenosom :

$$F_{RPD}(s) = K + T_D s \quad (433)$$

Pre prenos poruchy uzavretého regulačného obvodu platí :

$$F_z(s) = \frac{1}{s^2 + (T_D + 3)s + 1 + K}, \quad (434)$$

odkiaľ môžeme napísať všeobecnú charakteristickú rovnicu tohto regulačného obvodu :

$$s^2 + (T_D + 3)s + 1 + K = 0. \quad (435)$$

Požadovanej MStá a MTI odpovedá dvojica komplexne združených koreňov, ktorú určíme z už uvedených vzorcov nasledovne :

$$\alpha = MStá = 2, \quad \omega = \frac{\alpha}{MTI} = \frac{2}{0,4} = 5, \quad s_{1,2} = -2 \pm 5i$$

Po roznásobení koreňových činiteľov s požadovanými koreňmi  $s_{1,2}$  dostaneme charakteristickú rovnicu :

$$s^2 + 4s + 29 = 0. \quad (436)$$

Ak má byť priebeh regulovanej veličiny určený koreňmi  $s_{1,2}$  presne, potom aj všeobecná charakteristická rovnica regulačného obvodu musí mať také koeficienty, aby dávali rovnaké hodnoty koreňov  $s_{1,2}$ , teda musí platiť :

$$s^2 + (T_D + 3)s + (1 + K) = s^2 + 4s + 29. \quad (437)$$

Keďže koeficienty na oboch stranách pri najvyšších mocninách  $s$  majú už rovnaké koeficient, porovnaním koeficientov pri ďalších rovnakých mocninách  $s$  dostávame sústavu dvoch lineárnych rovníc pre neznáme parametre regulátora :

$$\begin{aligned} (T_D + 3) &= 4 \\ (1 + K) &= 29 \end{aligned} \quad (438)$$

odkiaľ dostávame hodnoty parametrov regulátora  $T_D = 1, K = 28$ , ktoré zabezpečia na začiatku zadané požiadavky na kvalitu regulačného pochodu. Pre kontrolu ešte opäť určíme veľkosť trvalej regulačnej odchýlky :

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} F_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + (T_D + 3)s + 1 + K} = \frac{1}{1 + K} = 0,03448 < 0,04$$

alebo

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} F_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 4s + 29} = \frac{1}{29} = 0,03447 < 0,04, \quad (4\%)$$

Teda dané požiadavky na kvalitu regulačného pochodu môžeme v tomto prípade na zadanej sústave dosiahnuť s proporcionálne derivačným regulátorom s parametrami  $K = 28, T_D = 1$ .

**Príklad 32 :** Pre regulovaný systém s tým istým prenosom ako v príklade 29 navrhňte vhodný regulátor tak, aby pri pôsobení poruchy jednotkového skoku na vstupe sústavy bola odchýlka regulovanej veličiny  $y(\infty) = 0$  a priebeh regulovanej veličiny  $y(t)$  odpovedal dvojici dominantných koreňov  $s_{1,2} = -2 \pm 5i$  (určené napr. zo zadanej MStá a MTI).

Vzhľadom na požiadavku  $y(\infty)=0$  musíme voľiť regulátor s integračnou zložkou s prenosom  $F_R(s)=1/(T_I s)$ , čím vzrastie rád prenosu poruchy aj regulovanej veličiny o jednotku ( $s$  je v menovateli), teda charakteristická rovnica regulačného obvodu bude tretieho stupňa, bude mať tri korene.

Podľa požiadaviek na dynamiku obvodu musí charakteristická rovnica obsahovať dvojicu dominantných koreňov  $s_{1,2}$  a jeden reálny záporný koreň  $s_3$ , ktorého hodnota musí byť omnoho väčšia, ako je hodnota reálnej časti koreňov  $s_{1,2}$ . Pre nastavenie troch koreňov musí mať regulátor tri meniteľné parametre, preto voľíme PID regulátor s prenosom :

$$F_{RPID}(s) = K + T_D s + \frac{1}{T_I s}. \quad (439)$$

Pre prenos poruchy uzavretého regulačného obvodu platí :

$$F_z(s) = \frac{s}{s^3 + (T_D + 3)s^2 + (1 + K)s + \frac{1}{T_I}}, \quad (440)$$

odkiaľ môžeme napísať všeobecnú charakteristickú rovnicu tohto regulačného obvodu :

$$s^3 + (T_D + 3)s^2 + (1 + K)s + \frac{1}{T_I} = 0. \quad (441)$$

Urobíme delenie tejto charakteristickej rovnice rovnicou danou súčinom koreňových činiteľov dominantnej dvojice koreňov :

$$s^2 + 4s + 29 = 0. \quad (442)$$

Uvedené delenie musí byť bezozvyškové, preto zvyšky pri rovnakých mocninách  $s$  postavíme rovné nule, čím získame prvé dve rovnice a z výsledku delenia  $s + (T_D - 1)$  dostaneme tretiu rovnicu pre tretí koreň :

$$\begin{aligned} K - 28 - 4T_D + 4 &= 0 \\ \frac{1}{T_I} - 29T_D + 29 &= 0. \\ s_3 + T_D - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (443)$$

Aby bola dodržaná podmienka dominantných koreňov, musí tretí koreň  $s_3$  ležať čo najďalej od koreňov  $s_{1,2}$ , napríklad nech  $s_3 = -10$ , potom z tretej rovnice vypočítame  $T_D = 11$ , z prvej  $K = 68$  a z druhej rovnice vypočítame  $T_I = 1/290$ , čím je úloha vyriešená.

#### 2.4.4.6 Určenie konštánt regulátora Ziegler-Nicholsovou metódou

Ako už bolo uvedené v predošlých kapitolách, najpresnejšiu reguláciu (minimálnu regulačnú odchýlku) dosiahneme pomocou integračného regulátora. Jeho nevýhodou je však malá rýchlosť. Preto sa kombinuje s proporcionálnym regulátorom a pre najväčšie nároky na rýchlosť regulácie aj s regulátorom derivačným. V každom prípade však bude kvalita regulácie závisieť aj od vlastností regulovanej sústavy. Z tohto pohľadu je nutné optimálne nastavenie regulátora. Najlepšie výsledky dosiahneme, ak nastavíme konštanty regulátora v prevádzkovom zapojení s regulovanou sústavou. V praxi sa z takýchto empirických metód najviac osvedčila a najznámejšou stala *Zieglerova-Nicholsova* metóda, ktorá je určená najmä pre nastavenie kombinovaných regulátorov PI a PID. Dáva menšie tlmenie prechodového deja, preto je nutné nastaviť zosilnenie regulátora na menšiu hodnotu, ako udáva táto metóda.

*Postup nastavenia* uvidíme pre prípad, ak nepoznáme prechodovú charakteristiku regulovanej sústavy a teda aj jej časové konštanty a pre prípad známej prechodovej charakteristiky a je nasledovný :

A. Postup v prípade neznámej prechodovej charakteristiky :

1. Ak regulátor má I a D zložku, tak vyradíme ( $T_D = 0$ ,  $T_I \rightarrow \infty$ ).
2. Postupným zväčšovaním zosilnenia  $K$  proporcionálneho regulátora dosiahneme stav na hranici stability, kedy v obvode vzniknú trvalé harmonické kmity. Doporučuje sa potom zosilnenie  $K$  opatrne meniť tak, aby amplitúda kmitov bola čo najmenšia, ale aby sa kmity udržali. To nastane pri kritickom zosilnení  $K_{krit}$ , pri ktorom je perióda netlmených kmitov  $T_{krit}$ .

3. Optimálne nastavenie jednotlivých typov a zložiek regulátorov je nasledovné :

- Regulátor P :

-zosilnenie regulátora :

$$K_{opt} = 0,5 K_{krit} \quad (444)$$

- Regulátor PD :

-zosilnenie regulátora (doladiť skusmo) :

$$K_{opt} = 0,5 K_{krit} \quad (445)$$

-derivačná časová konštanta :

$$T_{D opt} = 0,12 T_{krit} \quad (446)$$

- Regulátor PI :

-zosilnenie regulátora :

$$K_{opt} = 0,5 K_{krit} \quad (447)$$

-integračná časová konštanta :

$$T_{I opt} = 0,83 T_{krit} \quad (448)$$

- Regulátor PID :

-zosilnenie regulátora :

$$K_{opt} = 0,6 K_{krit} \quad (449)$$

-integračná časová konštanta :

$$T_{I opt} = 0,5 T_{krit} \quad (450)$$

-derivačná časová konštanta :

$$T_{D opt} = 0,12 T_{krit} \quad (451)$$

- Regulátor I – zmenšovaním integračnej konštanty  $T_I$  privedieme obvod na hranicu stability, čomu zodpovedá  $T_{I krit}$ , potom optimálne nastavenie :

- integračná časová konštanta :

$$T_{I opt} = 2 T_{I krit} \quad (452)$$

- pre požadovaný aperiodický priebeh :

$$T_{I aper} = 4 T_{I krit} \quad (453)$$

B. Postup v prípade známej prechodovej charakteristiky :

Ak poznáme prechodovú charakteristiku regulovanej sústavy, môžeme určiť dobu prietahu  $T_u$  a dobu nábehu  $T_n$  a zo statického prenosu aj zosilnenie regulovanej sústavy  $K_S = \Delta y / \Delta u$ , alebo tzv. činiteľ autoregulácie  $S = 1/K_S$ . Za predpokladu, že  $T_u < T_n$ , platí  $T_{krit} = 4 T_u$  a buď použijeme predošlé vzorce pre nastavenie PID regulátora :

$$\begin{aligned} K_{opt} &= 0,6 K_{krit} , \\ T_{I opt} &= 0,5 T_{krit} = 2 T_u , \\ T_{D opt} &= 0,12 T_{krit} \approx 0,5 T_{krit} . \end{aligned} \quad (454)$$

alebo optimálne parametre pre jednotlivé regulátory nastavíme podľa vzťahov využívajúcich dobu prietahu  $T_u$ , dobu nábehu  $T_n$  a zosilnenie sústavy  $K_S$ , súhrnne uvedených v Tab. 3.



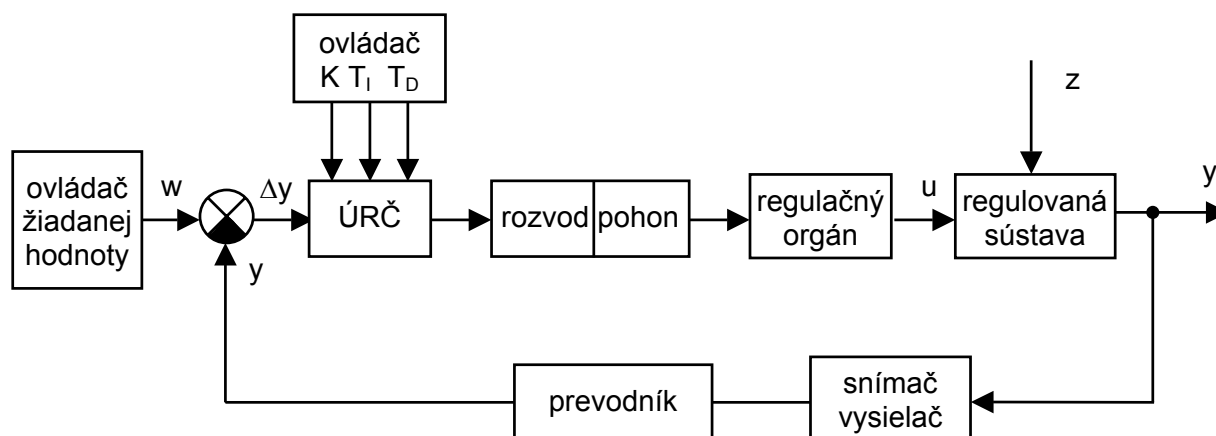
	$K$	$T_I$	$T_D$
P	$\frac{T_n}{T_u} S$	-	-
PI	$0,9 \frac{T_n}{T_u} S$	$3,5 T_u$	-
PID	$1,25 \frac{T_n}{T_u} S$	$2 T_u$	$0,5 T_u$

Tab. 3 : Optimálne nastavenie parametrov regulátora

Celkové statické zosilnenie regulačného obvodu je  $K_{opt}/S$ . Potom  $K_{opt}$  upravíme tak, aby ani pri najväčšom odľahčení sústavy nedošlo k jej rozkmitaniu.

Ak máme možnosť merať aj prechodovú charakteristiku regulačného obvodu, potom upravíme dodatočne konštanty regulátora tak, aby boli čo najlepšie splnené požiadavky na čo najmenšie regulačné plochy podľa integrálnych kritérií.

Pri nastavovaní parametrov musíme však dávať pozor, či sa jedná o regulátor bez interakcie alebo s interakciou, t.j. so vzájomným ovplyvňovaním parametrov regulátora (kap. 2.4.4.2, alebo [47]). V prípade vzájomnej interakcie musíme tento fakt pri nastavovaní parametrov regulátora zohľadniť.



Obr. 141 : Celková bloková schéma regulátora v regulačnom obvode

Ďalej je potrebné si uvedomiť, že vypočítané optimálne hodnoty konštánt regulátora sa vzťahujú na celú spätnoväzobnú slučku (Obr. 141) a nielen na ústredný regulačný člen, kde sa nastavujú. Preto musíme zohľadniť aj prenosové vlastnosti snímača, prípadne akčného člena, ak sme ich neuvažovali už pri stanovení dynamických vlastností sústavy.

Celkový regulátor teda obyčajne pozostáva z viacerých členov (Obr. 141), ktorých konštrukciu, princípy činnosti a ich vlastnosti sú obsahom ďalších predmetov. Každý z týchto členov plní v uzvretom regulačnom obvode svoju funkciu :

1. Meranie, prenos a vhodné vyjadrenie (prevod alebo transformáciu) regulovanej veličiny. Patria sem rôzne druhy snímačov, vysielače a prenosové cesty hodnôt regulovanej veličiny, prevodníky a porovnávacie zariadenia na porovnanie meraných a žiadaných hodnôt regulovanej veličiny.
2. Pre transformovanie priebehu regulačnej odchýlky tak, aby sa dosiahli požadované prenosové vlastnosti regulátora. Je to ústredný regulačný člen zložený z viac funkčných členov.

3. Výkonové zosilnenie signálov, potrebné pre dobrú funkciu regulátora, ak energia privádzaného signálu je malá, najmä pre ovládanie regulačných orgánov (ventily, posúvače, klapky a pod.). Patria sem rôzne druhy zosilňovačov (elektrické, pneumatické, hydraulické, mechanické a pod.).
4. Prestavovanie hodnoty akčnej veličiny v závislosti na hodnotách regulačnej odchýlky. Patria sem rôzne druhy pohonov, regulačné ventily, reostaty a pod.
5. Nastavovanie žiadanej hodnoty regulovanej veličiny a nastavovanie konštánt regulátora. Tieto členy sa nazývajú ovládacie členy.

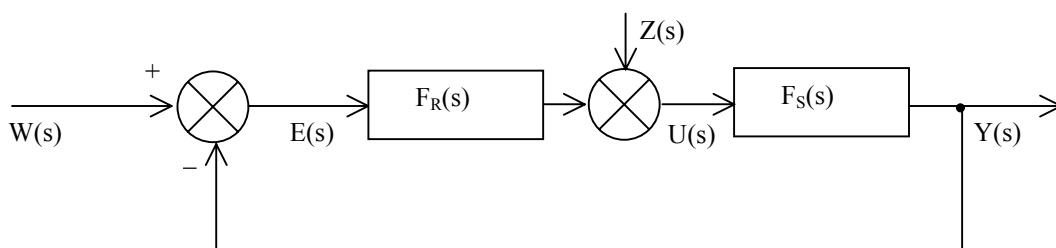
Na kvalitu regulácie má často veľký vplyv aj konštrukčné prevedenie regulovanej sústavy a umiestnenie snímača v sústave. Snahou je čo najviac skrátiť dobu prietahu. Preto je potrebné snímač viazať čo najtesnejšie s akčným výkonovým členom regulovanej sústavy. Je potrebné zabezpečiť, aby snímač snímal správne hodnotu regulovanej veličiny. Napríklad v peci sa umiestňuje snímač teploty (termočlánok) čo najbližšie ku zdroju tepla, spaliny je vhodné intenzívne premiešavať a pod. Často je vhodné umelo zväčšiť dobu nábehu bez zväčšenia doby prietahu. Pri ohrievanom kúpeli sa to dosiahne napríklad zväčšením objemu kvapaliny a jej intenzívnym miešaním. Je potrebné používať snímače s čo najmenšou zotrvačnosťou. Ak existujú v sústave dopravné oneskorenia, je potrebné ich zmenšiť na minimum.

Okrem tu uvedených metód pre návrh parametrov regulátorov existuje ešte veľa ďalších metód využívajúcich iné kritériá optimálnosti, ktoré si v prípade potreby čitateľ po zvládnutí tu uvedených základov teórie automatického riadenia dokáže ľahko naštudovať z dostupnej literatúry [11], [13], [28], [29], [30], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [54]. Podobne je možné v literatúre nájsť aj metódy pre syntézu stavových regulátorov [59], [60], [61], [71].

#### 2.4.4.7 Modelovanie spojitého regulačného obvodu

Modelovanie všeobecného systému pomocou simulačného prostriedku SIPRO ([52], [53], Tab. 5, Tab. 6) bolo uvedené už v kapitole 2.1.5, kde bol využitý na riešenie odozvy dynamického systému, teda na riešenie popisujúcej diferenciálnej rovnice systému.

Spojité regulačný obvod s dvoma vstupmi a s jedným výstupom :



je možné modelovať pomocou SIPRa buď modelovaním zodpovedajúcej prenosovej diferenciálnej rovnice regulačného obvodu (kapitola 2.1.5) alebo pomocou prenosových funkcií.

Predpokladajme všeobecnú regulovanú sústavu druhého rádu a PD regulátor. Zodpovedajúca diferenciálna rovnica takého regulačného obvodu vzhľadom na žadanú hodnotu je :

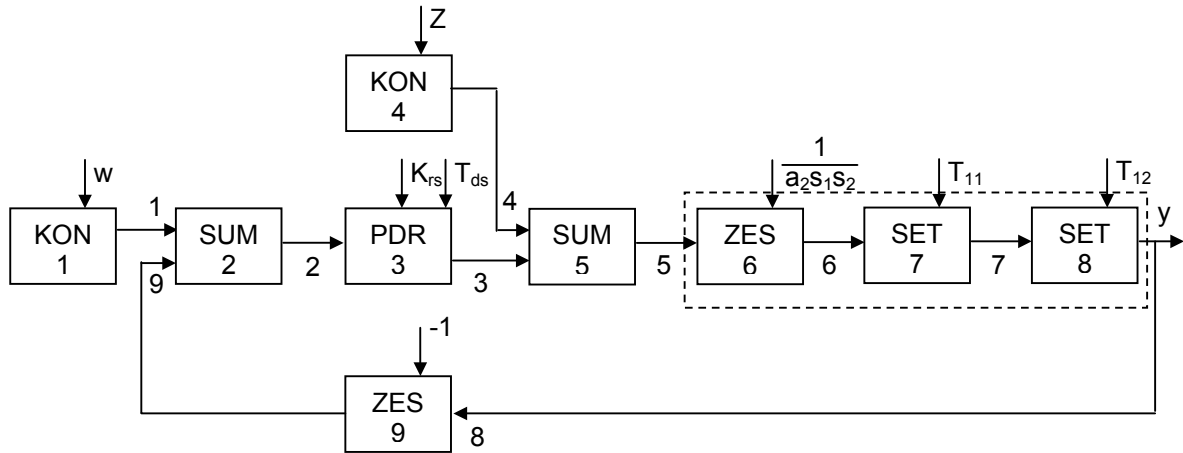
$$a_2 y''(t) + (a_1 + T_D) y'(t) + (a_0 + K) y(t) = K w(t) + T_D w'(t), \quad (455)$$

alebo vzhľadom na poruchu je :

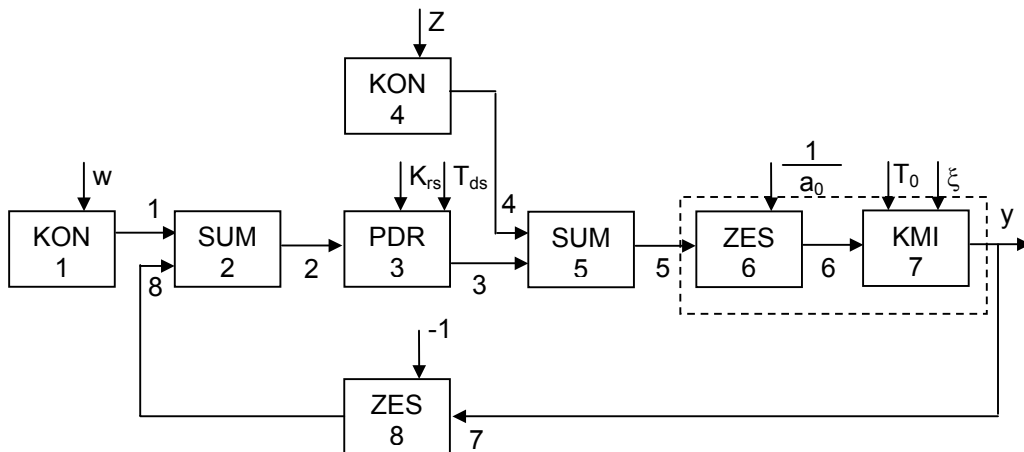
$$a_2 y''(t) + (a_1 + T_D) y'(t) + (a_0 + K) y(t) = K z(t) . \quad (456)$$

Tieto rovnice môžeme pomocou SIPRa riešiť podobne ako to bolo uvedené už v kapitole 2.1.5.

Pri modelovaní pomocou metódy prenosových funkcií je potrebné namodelovať všetky časti uvedeného regulačného obvodu na základe ich obrazového prenosu. Modelovanie regulovanej sústavy riešime podobne ako to bolo uvedené už v kapitole 2.1.5. Potom je potrebné namodelovať daný regulátor, riadiacu a poruchovú veličinu. Pre príslušnú hodnotu diskriminantu charakteristickej rovnice regulovanej sústavy sú simulačné blokové schémy uvedené na Obr. 142 a) b).



a) nekmitavá regulovaná sústava – kladný diskriminant charakteristickej rovnice



b) kmitavá regulovaná sústava – záporný diskriminant charakteristickej rovnice

Obr. 142 : Simulačná bloková schéma regulačného obvodu

Pri namodelovaní regulačného obvodu podľa schém na Obr. 142 a) alebo Obr. 142 b) nebude simulácia regulačného obvodu úplne správna, čo by sme mohli overiť napr. porovnaním s analytickým riešením. Dá sa to ľahko overiť aj tromi simuláciami pomocou uvedených schém vzhľadom na poruchovú veličinu ( $w(t)=1, z(t)=0$ ). Pri prejšej simulácii použijeme len  $K$  zložku PD regulátora, zložku  $T_D$  vyradíme ( $T_D = 0$ ). Pri druhej simulácii použijeme len  $T_D$  zložku PD regulátora, zložku  $K$  vyradíme ( $K = 0$ ). Pri tretej simulácii použijeme obidve zložky PD regulátora. Výsledky prvej a tretej simulácie sú rovnaké, výsledkom druhej simulácie je nulový výstup, teda takouto simuláciou nevieme zohľadniť derivačnú zložku regulátora. Dá sa to napraviť napr. tak, že za blok KON dáme oneskorovací blok TDP. Musíme si samozrejme uvedomiť, že tým bude oneskorené o dané spozdenie aj riešenie a pri analýzach to zohľadniť. V simulácii ale bude už zohľadnený aj vplyv derivačnej zložky regulátora.

Ďalej si je nutné všimnúť, že obrazové prenosy regulátorov, ako boli uvádzané v predošlých častiach (napr. pre PD regulátor  $F_{RPD}(s) = K + T_D s$ ), sú odlišné od obrazových prenosov týchto regulátorov

v SIPRe (opäť napr. pre PD regulátor  $F_{RPDs}(s) = K_s (1 + T_{sD} s)$ ). Túto skutočnosť musíme akceptovať a konštanty získané pri návrhu regulátora musíme pre použitie v SIPRe prepočítať podľa nasledujúcich vzorcov :

$$K_s = K, \quad T_{sD} = \frac{T_D}{K}. \quad (457)$$

Podobne obrazový prenos PID regulátora sme uvažovali v tvare  $F_{RPID}(s) = K + T_D s + 1/(T_i s)$ , kým SIPRO ich uvažuje v tvare  $F_{RPID_s}(s) = K_s (T_{sl} s + T_{sl} T_{sD} s^2 + 1)/(T_{sl} s)$ . Preto konštanty získané pri návrhu PID regulátora musíme pre použitie v SIPRe prepočítať podľa nasledujúcich vzorcov :

$$K_s = K, \quad T_{sD} = \frac{T_D}{K}, \quad T_{sl} = K T_i, \quad (458)$$

pričom platí, že  $T_{sl} > 0$  a  $K_s, T_{sD}$  sú bez obmedzenia.

Takýmito simuláciami je možné jednak overovať požadované kritériá kvality regulačného obvodu po návrhu parametrov regulátora, alebo ich experimentálnymi simuláciami aj navrhovať. Oveľa viac možností pre syntézu regulátorov poskytuje symulačný systém MATLAB [75], [76], [77] Tab. 7, Tab. 10.

### 3 Literatúra

- [1] Terpák, J., Dorčák, Ľ. : Procesy prenosu, TU Košice, Tlač *elfa* s.r.o., 2001, ISBN 80-7099-733-8
- [2] Lodes, A., Langfelder, I. : Procesy a zariadenia 1. Alfa, Bratislava 1987, ISBN 80-05-00150-9
- [3] Lacko, B., Beneš, P., Maixner, L., Šmejkal, L. : Automatizace a automatizační technika I, Systémové pojetí automatizace, Computer Press Praha 2000, ISBN 80-7226-246-7
- [4] Voráček, R., Andryšek, F., Brýl, Z., Kohout, L., Šmejkal, L. : Automatizace a automatizační technika II, Automatické řízení, Computer Press Praha 2000, ISBN 80-7226-247-5
- [5] Beneš, P., Chlebový, J., Langer, J., Martinásková, M., Voráček, R. : Automatizace a automatizační technika III, Prostředky automatizační techniky, Computer Press Praha 2000, ISBN 80-7226-248-3
- [6] Mikleš, J., Fikar, M. : Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov I, Modely a dynamické charakteristiky spojitých procesov, STU Bratislava, 1999, ISBN 80-277-1289-2
- [7] Hrubina, K. : Informatika, informačné systémy a technológie, FVT TU Košice, Informattech 1998, 195s.
- [8] Dorčák, Ľ. : Základy technickej kybernetiky, TU Košice, Tlač *elfa* s.r.o., 2000, ISBN 80-88964-52-0
- [9] Dorčák, Ľ., Terpák, J., Dorčáková, F. : Teória automatického riadenia, Spojité lineárne systémy, Vydavateľstvo: ES/AMS FBERG TU Košice, 2003, ISBN 80-8073-025-3
- [10] Petráš, I. : Teória automatického riadenia, Návod na cvičenia, ISBN 80-88964-52-0
- [11] Zábavník, V. : Teória automatického riadenia, Návod na cvičenia, ES VŠT Košice, 1988
- [12] Fejerčák, V., Líška, O., Hipík, Ľ. : Základy technickej kybernetiky, Návod na cvičenia, ES VŠT Košice, 1990
- [13] Csontó, J., Krokavec, D. : Teória automatického riadenia, ALFA Bratislava, 1984
- [14] Csontó, J. : Teória automatického riadenia I, Nelineárne sústavy, ALFA Bratislava, 1980
- [15] Krokavec, D. : Teória automatického riadenia II, Diskrétné systémy, ALFA Bratislava, 1984
- [16] Veselý, E., Badida, M., Telepovský, M. : Teória automatického riadenia II, ES TU Košice, 1992
- [17] Čech, J. : Počítačové modely na optimalizáciu dobývania ložísk, ALFA Bratislava, 1989
- [18] Šiška, F., Otáhal, A., Prokop, P., Sedlatý, V. : Banské vetranie, ALFA Bratislava, 1993
- [19] Bertalanffy, L., von : General System Theory. General System, New York, 1968.
- [20] Ashby, W. R. : General System Theory as a new Discipline, 3, 1958.
- [21] Ashby, W. R. : An introduction to cybernetics, London, Chapman and Hall 1956. (Český preklad Praha, Orbis 1961.)
- [22] Mesarovič, M. D. a kol. : Theory of hierarchical multilevel System – Academic Press, New York, 1970.
- [23] Wiener, N. : Kybernetika, neboli řízení a sdělování v živých organismech a strojích, SNTL Praha, 1960.
- [24] Wiener, N. : Kybernetika a společnost. ČSAV Praha, 1983.
- [25] Horovčák P., Baluch D. : Stanovenie parametrov prenosu dát pri www monitorovaní. Enviraautom 1/2001, Zborník vedeckých prác environmentalistiky a riadenia procesov, ISBN 80-7099-778-8, EAN: 9788070997789, str. 46 – 53
- [26] Leško I., Horovčák P., Futó J. : Specific energy minimization by drilling of rocks with acoustic method. Acta metallurgica Slovaca, 8, 2002. ISSN 1335-2393, pp. 104 – 108
- [27] Sarnovský, J. : Riadenie zložitých systémov, TU Košice, 1993
- [28] Sarnovský, J. : Riadenie technologických procesov, ALFA, Bratislava, 1982
- [29] Sarnovský, J. : Teória automatického riadenia, ALFA, Bratislava, 1983
- [30] Sarnovský, J., Pietrik, J. : Kybernetika, ALFA, Bratislava, 1984
- [31] Repiský, I., Rybička, J. : Automatizácia v hutníctve, ALFA, Bratislava, 1968
- [32] Dorčák, Ľ. : Numerical Models for Simulation the Fractional-Order Control Systems, Slovak Acad. Sci., Inst. Exp. Physics, UEF-04-94, Košice, 1994, 12 pages. (<http://arXiv:math.OC/0204108>)
- [33] Dorčák, Ľ., Leško, V., Košťial, I. 1996. Identification of Fractional Order Dynamical Systems. In *12<sup>th</sup> International Conference on Process Control and Simulation ASRTP'96*, September 10 - 13, Košice, Slovak Republic, vol I, pp. 62-68. (<http://arXiv:math.OC/0204181>)
- [34] Dorčák, Ľ., Petráš, I., Košťial, I. 1998. Algorithms for computation of stability measure and damping measure of fractional-order controllers. In *Proceedings of the ICAMC98/ASRTP'98*, September 8 - 12, High Tatras, 1998, pp. 243-246.
- [35] Petráš, I., Dorčák, Ľ. : The frequency methods for stability investigation of fractional control systems, SACTA journal, Vol.2, No.1/2, 1999, Durban, Link Hills, South Africa, pp. 75-85
- [36] Petráš, I., Podlubný, I., O'Leary, P., Dorčák, Ľ., Vinagre, B. M. : Analog Realizations of Fractional Order Controllers, F BERG, TU Košice, 2000, ISBN 80-7099-627-7.
- [37] Dorčák, Ľ., Petráš, I., Košťial, I. 2001. Modelling and Analysis of Fractional-Order Regulated Systems in the State Space. In *Proceedings of ICC2000*, May 23-26, 2000, High Tatras, Slovak Republic, pp. 185-188. (<http://arXiv.org/abs/math.OC/0007155>)

- [38] Dorčák, L., Petráš, I., Košťal, I., Terpák, J. 2000. State-Space Controller Design for the FO Regulated Systems. In *ICCC2001*, Krynica, Poland, pp. 15-20.
- [39] Podlubný, I., Petráš, I., Vinagre, B. M., O'Leary, P., Dorčák, L. : Analogue Realizations of Fractional-Order Controllers, Special Issue of Fractional Order Calculus and its Applications, Nonlinear Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 2002, 29, pp. 281-296
- [40] Podlubný, I. : Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers, UEF-03-94, SAV, Košice, 1994
- [41] Podlubný, I. : Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999, ISBN 0-12-558840-2, 368 pages.
- [42] D'Azzo, J.J, Houpis, C.H. : Linear control system analysis and design, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995
- [43] Dorf, R.C., Bishop, R.H. : Modern control system, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1998
- [44] Driels, M. : Linear control system engineering, McGraw-Hill, Inc., New York, 1996
- [45] Forsythe, W., Goodall, R.M. : Digital Control, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991
- [46] Jančárová, V. : Teória riadenia, Alfa Bratislava, 1982
- [47] Jančár, K. : Meranie a regulácia, Alfa Bratislava, 1977
- [48] Košťal, I. : Automatizované systémy riadenia technologických procesov I, ES VŠT Košice, 1984
- [49] Kozák, Š. : Lineárne číslicové systémy I, STU Bratislava, 1995
- [50] Madarász, L. : Teória automatického riadenia, Lineárne a nelineárne sústavy, Alfa Bratislava, 1990
- [51] Noskovič, P. : Modelování a identifikace systémů, Montanex a.s., Ostrava, 1999
- [52] Farana, R., Landryová, L., Lokosová, J., Smutný, L., Víteček, A., Vítečková, M., Wagnerová, R. : Programová podpora simulace dynamických systémů. Sbírka řešených příkladů. VŠB Ostrava, 1996
- [53] Farana, R. : Univerzální simulační program SIPRO 3.4. Uživatelská příručka. VŠB Ostrava, 1996
- [54] Vítečková, M. : Seřízení regulátorů metodou inverze dynamiky, VŠB TU Ostrava 1998, ISBN 80-7078-628-0
- [55] Zítek, P., Víteček, A. : Návrh řízení podsystémů se zpožděním a nelinearitami, ČVUT, Praha, 1999
- [56] Kubík, S., Kotek, Z., Strejc, V., Štecha, J. : Teorie automatického řízení I, Lineární a nelineární systémy, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
- [57] Pokorný, M. : Řídicí systémy se znalostní bází, FEI VŠB Ostrava, 1995
- [58] Kwaśniewski, J. : Programmable logic controllers, Cracow, 2002, ISBN 83-86320-45-1
- [59] Zboray, L., Ďurovský, F., Tomko, J. : Regulované pohony, VIENALA 2000, ISBN 80-88922-13-5
- [60] Zboray, L., Ďurovský, F. : Stavové riadenie elektrických pohonov, FEI Košice, 1995, ISBN 80-967249-1-6
- [61] Modrlák, O. : Teorie automatického řízení II., Základy analýzy a syntézy ve stavovém prostoru, Studijní materiály, TU v Liberci, KŘT, 2002
- [62] Modrlák, O. : Teorie automatického řízení II., Nelineární systémy, Studijní materiály, TU v Liberci, KŘT, 2002
- [63] Štecha, J., Havlena, V. : Teorie dynamických systémů, ČVUT Fakulta elektrotechnická, ES ČVUT, Praha 6, 1995
- [64] Vlach, J. : Řízení a vizualizace technologických procesů, BEN, Praha, 1999, ISBN 80-86056-66-X
- [65] Kainka, B., Berndt, H.J. : Využití rozhraní PC pod Windows, GENESIS grafické studio, Brno, 2000, ISBN 80-86167-13-5
- [66] Kotek, Z., Vysoký, P., Zdráhal, Z. : Kybernetika, SNTL Praha, 1990, ISBN 80-03-00584-1
- [67] Petrovič, J., Ivanič, J. : Automatizácia v priemysle - Riadenie, ALFA Bratislava, 1988, ISBN 80-05-00087-1
- [68] Balátě, J. a kol. : Technické prostředky automatického řízení, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1986
- [69] Bučko, M. : Kybernetika, Návod na cvičenia, ES TU Košice, 1991
- [70] Gmíterko, A., Molnár, V. : Vybrané kapitoly zo základov technickej kybernetiky, ELFA s.r.o., Košice, 1995, ISBN 80-967131-8-3
- [71] Zahradník, J.: Nové směry v televizní technice, Amatérské Radio, Konstrukční elektronika, 6/2002
- [72] Strejc, V. : Stavová teorie lineárního diskrétního řízení, Academia, Praha, 1978
- [73] Tomek, G., Vávrová, V. : Řízení výroby, Grada, 2000, ISBN 80-7169-955-1
- [74] Leško, I. : Teória informácie, Učebné texty, FBERG TU Košice, 2001, Elfa
- [75] Kozák, Š. : Matlab – Simulink 1, STU Bratislava 1999, ISBN 80-227-1235-2
- [76] Kozák, Š. : Matlab – Simulink 2, STU Bratislava 1999, ISBN 80-227-1235-3
- [77] Vítek, J. : Matlab pre elektrické pohony, Žilinská univerzita, 1997, ISBN 80-7100-398-0

## 4 PRÍLOHA A

Laplaceove obrazy vybraných funkcií

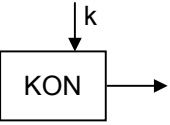
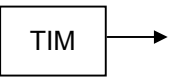
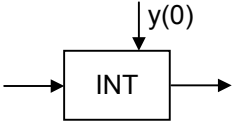
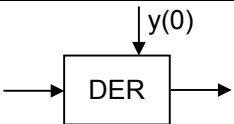
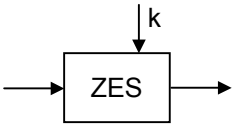
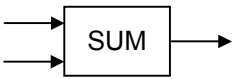

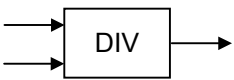
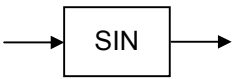
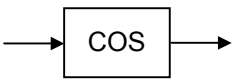

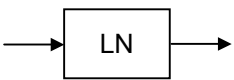
$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ jednotková impulzná funkcia	1
$1(t)$ jednotková skoková funkcia	$1/s$
$1(t) - 1(t - T_v)$ , pravouhlý impulz $T_v$ je časová konštanta	$\frac{1 - e^{-sT_v}}{s}$
$a.t. 1(t)$ rampová funkcia, $a$ je konštanta	$a/s^2$
$at^{n-1}1(t), n > 1$	$a \frac{(n-1)!}{s^n}$
$t^n 1(t)$	$n! / s^{n+1}$
$e^{\mp at} 1(t)$	$\frac{1}{s \pm a}$
$t^n e^{-at} 1(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} 1(t)$	$\frac{1}{Ts+1}$
$(1 - e^{-at})1(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$(1 - at)e^{-at} 1(t)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$1 - (1 + at)e^{-at} 1(t)$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
$\sin \omega t 1(t), \omega$ je konštanta	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t 1(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t 1(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t \pm \phi) 1(t)$	$\frac{\omega \cos \phi \pm s \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t 1(t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$(1 - e^{-at} (\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t)) 1(t)$	$\frac{a^2 + \omega^2}{s[(s+a)^2 + \omega^2]}$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Tab. 4 : Tabuľka Laplaceových obrazov vybraných funkcií



## **5 PRÍLOHA B**

Popis blokov simulačného systému SIPRO

Blok	Popis	Poznámka
	Blok generujúci konštantu	Výstupom bloku je konštantná hodnota k.
	Blok generujúci čas simulácie	Výstupom bloku je okamžitá hodnota času simulácie.
	Integrátor $y(t) = \int_0^t x(t) dt$	Výstupom bloku je hodnota určitého integrálu vstupnej funkcie v medziach od 0 do t zväčšená o zadanú počiatočnú hodnotu y(0)
	Derivátor	Výstupom bloku je hodnota prvej derivácie vstupnej funkcie podľa času. V čase t=0 je výstupom počiatočná podmienka y(0).
	Zosilňovač	Výstupom bloku je hodnota vstupu vynásobená žiadaným zosilnením k.
	Sumátor	Výstupom bloku je súčet hodnôt oboch vstupov.
	Súčin	Výstupom bloku je súčin hodnôt oboch vstupov.
	Podiel	Výstupom bloku je podiel hodnoty vstupu1 (horný) k vstupu2 (dolný). Pokiaľ je hodnota vstupu2 blízka nule, je výstupom veľké číslo.
	sin x	Výstupom bloku je výsledok funkcie sínus, kde vstup je argument v radiánoch.
	cos x	Výstupom bloku je výsledok funkcie kosínus, kde vstup je argument v radiánoch.
	$e^x$	Výstupom bloku je hodnota základu prirodzeného logaritmu e umocnená hodnotou vstupu.
	ln x	Výstupom bloku je prirodzený logaritmus hodnoty vstupu.

Tab. 5 : Popis blokov simulačného systému SIPRO - a

Blok	Popis	Poznámka
	$\frac{1}{T_1 s}$	Blok realizuje spojité prenos integračného člena prvého rádu s časovou konštantou $T_1$ ( $T_1 > 0$ ).
	$\frac{1}{T_1 s + 1}$	Blok realizuje spojité prenos proporcionálneho člena prvého rádu s časovou konštantou $T_1$ ( $T_1 > 0$ ).
	$\frac{1}{(T_0 s)^2 + 2\xi T_0 s + 1}$	Bloku realizuje spojité prenos proporcionálneho člena druhého rádu – kmitavého s časovou konštantou $T_0$ a koeficientom pomerného tlmenia $\xi$ ( $T_0 \geq 0$ $ \xi  \leq 1$ ).
	$K_r \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$	Bloku realizuje spojité prenos PI regulátora s nastaviteľnými parametrami $K_r$ a $T_i$ . Algoritmus využíva integrácie ako blok INT ( $T_i > 0$ ).
	$K_r (1 + T_D s)$	Bloku realizuje spojité prenos PD regulátora s nastaviteľnými parametrami $K_r$ a $T_D$ . Algoritmus využíva derivácie ako blok DER.
	$\frac{K_r (1 + T_i s + T_i T_D s^2)}{T_i s}$	Bloku realizuje spojité prenos PID regulátora s nastaviteľnými parametrami $K_r$ , $T_i$ a $T_D$ . Algoritmus využíva integrácie ako blok INT a derivácie metódou spätnej derivácie ( $T_i > 0$ ).
	diskretný regulátor proporcionálno-sumačný	Bloku realizuje prenos diskretného PS regulátora s nastaviteľnými parametrami $K_r$ a $T_i$ . Vzorkovacia perióda sa zadáva v menu a musí byť väčšia ako 0 ( $K_r > 0$ , $T_i > 0,0001$ ).
	diskretný regulátor proporcionálno-derivačný	Bloku realizuje prenos diskretného PD regulátora s nastaviteľnými parametrami $K_r$ a $T_D$ . Vzorkovacia perióda sa zadáva v menu a musí byť väčšia ako 0 ( $K_r > 0$ , $T_D > 0$ ).
	diskretný regulátor PSD	Bloku realizuje prenos diskretného PSD regulátora s nastaviteľnými parametrami $K_r$ , $T_i$ a $T_D$ . Vzorkovacia perióda sa zadáva v menu a musí byť väčšia ako 0 ( $K_r > 0$ , $T_i > 0,0001$ , $T_D > 0$ ).

Tab. 6 : Popis blokov simulačného systému SIPRO - b



## **6 PRÍLOHA C**

Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB

<b>Riadenie príkazového okna</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
clc	vymazanie príkazového okna
echo on/off	povolenie/zakázanie výpisu vykonávajúcich sa príkazov
format	nastavenie výstupného formátu
home	nastavenie kurzora na začiatok
more	kontrola výstupu stránok v príkazovom okne
<b>Pracovný priestor Matlabu</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
clear	vymazanie príkazového okna
disp	zobrazenie matice alebo textu
length	dĺžka vektora
load	načítanie premenných z disku
pack	úprava pamäte pracovného priestoru
save	uloženie premenných na disk
size	rozmery matice, vektora
who	výpis aktuálnych premenných v skrátenej forme
whos	výpis aktuálnych premenných v rozšírenej forme
<b>Základné príkazy a funkcie</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
demo	spustenie ukážok – demo
help	pomoc, opis príkazov a funkcií
info	informácie o Matlabe a Math Works
lookfor	hľadanie kľúčového slova cez help položky
path	kontrola nastavenia cesty
type	výpis obsahu súboru
what	výpis m-, mat-, mex-súborov v adresári
which	lokalizácia funkcie a súboru
<b>Práca so súbormi a operačným systémom</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
cd	zmena aktuálneho pracovného adresára
delete	vymazanie súboru
diary	uloženie textu do súboru
dir	výpis obsahu adresára
detenv	nastavenie hodnoty prostredia
unix	výkonávanie príkazu operačného systému Unix
which	výkonávanie príkazu operačného systému MS-DOS
<b>Špeciálne premenné a konštanty</b>	
<b>Premenná</b>	<b>Popis</b>
ans	automatická premenná na odpoveď
computer	premenná počítačového typu
eps	relatívna presnosť pri výpočtoch s desatinnou bodkou
flops	počet operácií s desatinnou bodkou
i, j	Imaginárne operátory
inf	výsledok je $+\infty$
NaN	nie je číslo, neexistuje daná operácia
nargin	vstupné číslo do funkcie
nargout	výstupné číslo z funkcie
why	úspešná odpoveď
version	číslo verzie Matlabu
pi	Ludolfovo číslo 3.1415926535897...
realmax	najväčšie reálne číslo 1.7977e+308
realmin	najmenšie reálne číslo 2.2251e-308

Tab. 7 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - a

<b>Dátum a čas</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
now	aktuálny dátum a čas v sériovom dátumovom čísle
date	aktuálny dátum v dátumovom reťazci
clock	aktuálny dátum a čas v dátumovom vektore
datenum	konvertuje do sériového dátumového čísla
datestr	konvertuje do dátumového reťazca
datevec	konvertuje do dátumového vektora
calendar	zobrazenie kalendára zadaného mesiaca
weekday	aký deň je v zadanom dátume
eomday	počet dní v zadanom mesiaci
datetick	zmena formátu dátumu, času v grafe
cputime	uplynulý čas v CPU
tic, toc	funkcie na štart/stop časovača
Etime	čas trvania funkcie
<b>Elementárne matematické funkcie</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
acos	Arkuskosínus
acosh	arkuskosínus hyperbolický
asin	arkussínus
asinh	arkussínus hyperbolický
atan	arkustangens
atanh	arkustangens hyperbolický
atan2	arkustangens dvoch reálnych častí
cos	kosínus
cosh	kosínus hyperbolický
sin	sínus
sinh	sínus hyperbolický
tan	tangens
tanh	tangens hyperbolický
exp	exponenciálna funkcia
log	prirodzený logaritmus
log10	dekadický logaritmus
sqrt	odmocnina
abs	absolútna hodnota
angle	fázový uhol
conj	komplexné združené číslo
imag	imaginárna časť komplexného čísla
real	reálna časť komplexného čísla
rem	zvyšok po celočíselnom delení
sign	signum funkcia
fix	najbližšie celé číslo smerom k nule
floor	najbližšie celé číslo smerom k $-\infty$
ceil	najbližšie celé číslo smerom k $+\infty$
round	najbližšie celé číslo
<b>Funkcie pre manipuláciu s maticami</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
diag	vytvorenie a vybratie diagonály matice
fliplr	výmena stĺpcov matice zľava/doprava
flipud	výmena riadkov matice zhora/nadol
rot90	rotácia matice o 90 stupňov
size	rozmery matice
tril	vybratie dolnej triangulárnej časti
triu	vybratie hornej triangulárnej časti
:	index v matici

Tab. 8 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - b

<b>Špeciálne matice</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
eye	jednotková matica
zeros	nulová matica
ones	matica zložená z jednotiek
rand	matica zložená z náhodne vybraných čísel z intervalu (0,1)
randn	matica zložená z náhodne vybraných čísel z intervalu
linspace	Vektor hodnôt s lineárnym delením
logspace	Vektor hodnôt s logaritmickým delením
meshgrid	X a Y súradnice pre 3-D zobrazenie
<b>Príkazy na analýzu vlastností matic</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
cond	číslo podmienenosti matice
det	determinant matice
norm	norma matice
null	nulové zobrazenie matice
orth	ortogonálna matica
rcond	ekvivalentný odhad podmienenosti
rank	počet lineárne nezávislých riadkov
rref	redukcia matice na echelov tvar
trace	suma diagonálnych prvkov matice
<b>Príkazy pre riešenie lineárnych rovníc</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
chol	Choleskeho faktorizácia
inv	inverzná matica
lsq	najmenšie kubické riešenie s poznaním kovariancie
lu	faktorizácia z Gausovej eliminácie
nnls	najmenšia mocnina
pinv	pseudoinverzia matice
qr	ortogonálno-triangulárny rozklad
\a/	riešenie lineárnych rovníc
<b>Rozklady matice na vlastné a singulárne hodnoty</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
balance	diagonálne mierkovanie na zlepšenie presnosti vlastných hodnôt matice
cdf2rdf	z komplexnej diagonálnej formy do reálnej diagonálnej formy
eig	rozklad na vlastné hodnoty a vlastné vektory
hess	Hessembergova forma
poly	charakteristický polynóm
qz	generuje vlastné hodnoty
rsf2csf	z reálnej diagonálnej formy do komplexnej diagonálnej formy
schur	Schurova dekompozícia
svd	singulárny rozklad
<b>Maticové funkcie</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
expm	exponenciála matice
expm1	m-súbor vytvorený z expm
expm2	exponenciála matice cez Taylorovo vyjadrenie
expm3	exponenciála matice cez vlastné hodnoty a vektory
funm	hodnotenie zadanej maticovej funkcie
logm	logaritmus matice
sqrtn	druhá odmocnina matice

Tab. 9 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - c



<b>Špeciálne matice</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
compan	sprievodná matica pre polynóm
hadamard	Hadamaidova matica
hankel	Hankelova matica
hilb	Hilbertova matica
invhilb	inverzná Hilbertova matica
magic	magická štvorcová matica
pascal	Pascalova matica
rosser	klasický test symetrických vlastných hodnôt matice
toeplitz	Toeplitzova matica
vander	Vendermondeho matica
wilkinson	Wilkinsonov test vlastných hodnôt matice
<b>Polynomické funkcie</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
conv	násobenie polynómov
deconv	Delenie polynómov
poly	konštrukcia polynómu zo špecifikovaných koreňov
polyder	derivácia polynómu
polyfit	aproximácia dát polynómom
polyval	hodnota polynómu
polyvalm	hodnota polynómu s maticovým argumentom
residue	rozklad na parciálne zlomky (residuá)
roots	nájdenie koreňov polynómu
<b>Interpolácia dát</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
interp1	jednorozmerná interpolácia dát
interpft	jednorozmerná interpolácia pomocou Fourierovej transformácie
interp2	dvojrzmerná interpolácia dát
interp3	trojrozmerná interpolácia dát
interp	n-rozmerná interpolácia dát
griddata	rozloženie dát do mriežky
spline	kubická drážková interpolácia dát
<b>Základné funkcie pre prácu s údajmi</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
cumprod	kumulatívne násobenie prvkov
cumsum	kumulatívny súčet prvkov
max	najväčší prvok
mean	priemer alebo stredná hodnota
median	median – stredná hodnota polohy
min	najmenší prvok
prod	násobenie prvkov
sort	triedenie, zoraďovanie prvkov
std	štandardná odchýlka
sum	súčet prvkov
trapz	numerická integrácia
<b>Konečné diferencie, skalárny a vektorový súčin vektorov</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
diff	Diferencia
gradient	aproximovaný gradient
del2	päťbodový Laplacian
cross	vektorový súčin vektorov
dot	skalárny súčin vektorov

Tab. 10 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB – d

<b>Konvolúcia, kovariancia, korelácia a filtrácia dát</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
corrcoef	korelácia koeficientov
cov	kovariancia matice
conv	konvolúcia a nasobenie polynómov
conv2	dvojmerná konvolúcia
deconv	dekonvolúcia a delenie polynómov
filter	jednorozmerný číslicový filter
filter2	dvojmerný číslicový filter
<b>Funkcie pre Fourierovu transformáciu</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
abs	amplitúda
angle	fázový uhol
cplxpair	zoradenie čísel do komplexne konjugovaných párov
fft	diskrétna Fourierova transformácia
fft2	dvojmerná diskrétna Fourierova transformácia
fftn	n-rozmerná diskrétna Fourierova transformácia
fftshift	Fourierova transformácia s posuvom
ifft	inverzná diskrétna Fourierova transformácia
ifft2	dvojmerná inverzná diskrétna Fourierova transformácia
ifftn	n-rozmerná inverzná diskrétna Fourierova transformácia
nextpow2	nasledujúca vyššia mocnina čísla 2
unwrap	skoková zmena fázového uhla
<b>Práca s funkciami v Matlabe</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
fmin	minimalizácia funkcie s jednou premennou
fmins	minimalizácia funkcie s niekoľkými premennými
fplot	zobrazenie priebehu funkcie
fzero	Nájdenie núl funkcie s jednou premennou
ode23	riešenie diferenciálnych rovníc metódou Runge – Kutta 3.radu
ode45	riešenie diferenciálnych rovníc metódou Runge – Kutta 5.radu
quad	numerický integrál v tvare nižšieho rádu
quad8	numerický integrál v tvare vyššieho rádu
<b>Príkazy a funkcie pre vytváranie vlastných aplikácií</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
eval	vykoná reťazec s Matlab výrazu
feval	vykoná funkciu so špecifickým menom
function	pridanie novej funkcie
global	definovanie globálnej premennej
nargchk	kontrola počtu vstupných parametrov
<b>Riadiace príkazy</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
break	ukončenie vykonávajúceho sa cyklu
else	súvisiace s if
elseif	súvisiace s if
end	ukončenie rozsahu príkazov for, while a if
error	zobrazenie správy a ukončenie funkcie
for	opakované vykonávanie príkazov so špecifikovaným číslom
if	podmienené vykonávanie príkazov
switch	podmienené vetvenie príkazov
return	návrat do volajúcej funkcie
while	podmienené opakovanie vykonávania príkazov

Tab. 11 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - e

<b>Príkazy pre užívateľský vstup</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
input	žiadosť o vstup informácie užívateľa z klávesnice
keyboard	funkcia preruší chod programu pre príkazy z príkazového riadku
menu	funkcia umožňujúca výber cez menu a vracia poradie vybranej položky
pause	čakanie na stlačenie klávesy
<b>Grafika v Matlabe – grafické prostredie</b>	
<b>Príkaz</b>	<b>Popis</b>
clf	zmazanie aktuálneho obrazca
close	uzatvorenie okna grafického obrázku
figure	otvorenie okna grafického obrázku
gcf	číslo aktuálneho okna grafického obrázku
<b>– dvojrozmerné grafy</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
Fill	vyplnenie dvojrozmerného mnohoúhelníka
Loglog	zobrazenie, ak osi majú logaritmické mierky
Plot	Lineárne zobrazenie
Plotyy	lineárne zobrazenie s dvomi mierkami na ľavej a pravej strane
semilogx	zobrazenie, ak os x je v logaritmickej mierke
semilogy	zobrazenie, ak os y je v logaritmickej mierke
<b>– základné riadiace funkcie pre zobrazenie</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
axes	vytvorenie osí na ľubovoľnú pozíciu
axis	nastavenie rozmerov osí a vzhľadu
caxis	nastavenie rozsahu farieb osí
cla	zmazanie osí
box	zobrazenie rámika osí
gca	vracia číslo aktuálnych osí
get	zistenie nastavenia grafického objektu
hold	zachovanie aktuálneho grafu
set	nastavenie vlastností grafického objektu
subplot	rozdelenie grafického okna na subokná
<b>– označenie a popis grafov</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
grid	čiarová sieť
gtext	text umiestnený myšou
legend	vytvorenie legendy priebehov
text	umiestnenie textu
title	názov grafu
xlabel	popis osi x
ylabel	popis osi y
zlabel	popis osi z
<b>– špeciálne grafy</b>	
<b>Funkcia</b>	<b>Popis</b>
bar	dvojrozmerný zvislý stĺpcový graf
bar3	trojrozmerný zvislý stĺpcový graf
barh, bar3h	dvojrozmerný, trojrozmerný vodorovný stĺpcový graf
errorbar	zobrazenie s odchýlkou
hist	zobrazenie histogramu
rose	zobrazenie uhlového histogramu
polar	zobrazenie v polárnych súradniciach
area, pie	plošný, kruhový graf
stem, steam3	dvojrozmerné, trojrozmerné kmeňové zobrazenie
stairs	schodové zobrazenie

Tab. 12 : Popis vybraných príkazov simulačného systému MATLAB - f

Autori : Doc. Ing. Ľubomír Dorčák, CSc.  
Doc. Ing. Ján Terpák, CSc.  
Ing. Františka Dorčáková

Lektori : Prof. RNDr. Igor Podlubný, CSc.  
Ing. Ladislav Ivanecký, CSc.

Názov : Teória automatického riadenia : Spojité lineárne systémy

Dátum vyhotovenia : 2006

Vydalo : TU Košice

Vydanie : prvé

ISBN : 80-8073-025-3