

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií

Ivo PETRÁŠ

TEÓRIA AUTOMATICKÉHO RIADENIA

Návody na cvičenia

elfa, s.r.o.
Košice, 2001

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií
Katedra informatizácie a riadenia procesov

Ing. Ivo PETRÁŠ, PhD

TEÓRIA AUTOMATICKÉHO RIADENIA

Návody na cvičenia

Košice, 2001

Lektori: Doc. Ing. Ľubomír DORČÁK, CSc.

Ing. Ján TERPÁK, CSc.

Copyright © Ing. Ivo PETRÁŠ, PhD, 2001

Text skrípt neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou vydavateľstva. Za jazykovú a odbornú náplň textu zodpovedá autor.

ISBN 80-88964-92-X

Obsah

Predslov	1
1 Základné pojmy v teórii automatického riadenia	2
1.1 Veličiny automatického riadenia	2
1.2 Spôsoby riadenia	3
1.3 Spätnoväzobný regulačný obvod	4
2 Laplaceova transformácia	5
2.1 Definícia a vlastnosti Laplaceovej transformácie (LT)	5
2.2 Výpočet LT integrovaním	6
2.3 Výpočet LT cez transformačný slovník	7
2.4 Výpočet inverznej LT	7
3 Analytické modely spojitých systémov	9
3.1 Matematické modely dynamických systémov	9
3.2 Klasické metódy riešenia diferenciálnych rovníc	10
3.3 Riešenia diferenciálnych rovníc pomocou LT	11
4 Identifikácia spojitých systémov	13
4.1 Metóda vyhodnocovania prechodových charakteristík	13
4.2 Metóda postupnej integrácie	14
5 Modelovanie spojitých systémov cez SIPRO	16
5.1 Metóda znižovania rádu derivácie	16
5.2 Modelovanie cez prenosové bloky	16
6 Vyšetrovanie charakteristík spojitých systémov	19
6.1 Vyšetrovanie impulzových a prechodových charakteristík	19
6.2 Vyšetrovanie frekvenčných charakteristík	20
6.3 Vyšetrovanie fázových portrétov	22
7 Algebra prenosov	24
7.1 Základné zapojenia prenosových blokov	24
7.2 Odvodzovanie diferenciálnych rovníc z prenosov	26
8 Syntéza spojitého <i>PID</i> regulátora	28
8.1 Definícia spojitého <i>PID</i> regulátora	28
8.2 Metóda dominantných koreňov	28
8.3 Ziegler-Nicholsova metóda	31
9 Kritériá akosti dynamických systémov	33
9.1 Asymptotické kritériá akosti	33
9.2 Globálne kritériá akosti	33
9.3 Lokálne kritériá akosti	34

10 Určovanie stability spojitých systémov	36
10.1 Stabilita v časovej oblasti	36
10.2 Algebraické metódy vyšetrovania stability	37
10.3 Frekvenčné metódy vyšetrovania stability	38
11 Diskrétne systémy	40
11.1 Z-transformácia	40
11.2 Diferenčné rovnice a diskrétne prenosy systémov	40
11.3 Diskretizácia spojitých systémov	40
11.4 Diskrétne <i>PSD</i> regulátory	42
11.5 Kritériá stability diskrétnych systémov	42
12 Nelineárne spojité systémy	43
12.1 Definícia nelineárnych systémov	43
12.2 Matematický popis nelineárnych systémov	43
12.3 Linearizácia	43
12.4 Základné nelinearity	44
12.5 Stabilita nelineárnych systémov	44
13 Spojité systémy neceločíselného rádu	47
13.1 Úvod	47
13.2 Derivácia a integrál neceločíselného rádu	47
13.3 Sústavy neceločíselného rádu	48
13.4 Regulátory neceločíselného rádu	48
13.5 Modelovanie a simulácia regulačných obvodov	48
Príloha 1: Slovník Laplaceovej transformácie	50
Príloha 2: Slovník diskkrétnej Z-transformácie	51
Príloha 3: Eulerove vzťahy	51
Literatúra	52

Predslov

Tieto návody na cvičenia z predmetu *Teória automatického riadenia* boli vydané pre poslucháčov IV. ročníka vysokoškolského štúdia, odboru: *Riadenie procesov získavania a spracovania surovín*, smer: *Technologický management*, na Fakulte BERG, Technickej univerzity v Košiciach.

Cieľom predkladaného textu je poskytnúť poslucháčovi návod na riešenie úloh z oblasti automatického riadenia. Obsah týchto cvičení systematicky nadväzuje na prednášky uvedeného predmetu a opiera sa o vedomosti získané v predmetoch Matematika, Matematické základy automatizácie, Modelovania a simulácia procesov, Identifikácia systémov a Riadenie technologických procesov. Niektoré ďalšie potrebné informácie je možné nájsť aj v publikáciách uvedených v zozname použitej literatúry.

Obsah skrípt sa týka teórie lineárnych systémov (spojitých aj diskrétnych), nelineárnych systémov (spojitých) a systémov s deriváciami neceločíselného rádu. Náplň je rozdelená do trinástich cvičení a obsahuje riešené a neriešené úlohy z danej problematiky. Skriptá sú iba úvodom do podrobnejšieho štúdia tejto problematiky a umožňujú orientovať sa v problematike teórie automatického riadenia.

Touto cestou chcem tiež poďakovať Doc. Ing. Ľubomírovi Dorčákovi, CSc. a Ing. Jánovi Terpákovi, CSc. za prečítanie rukopisu a lektorovanie týchto skrípt a za ich cenné rady a pripomienky.

Košice, marec 2001

Autor

1 Základné pojmy v teórii automatického riadenia

1.1 Veličiny automatického riadenia

Základné veličiny používané v automatickom riadení uvádza Tab. č. 1:

Tab. č. 1: Veličiny automatického riadenia.

Názov veličiny	Označenie
žiadaná hodnota	w
regulačná odchýlka	e
riadiaca veličina	u
akčná veličina	a
riadená veličina	y
stavová veličina	x
porucha	z

Všetky uvedené označenia veličín sa využívajú pri popisoch regulačných obvodov ako aj samotných regulátorov a regulovaných sústav.

Ďalej sú uvedené niektoré dôležité pojmy, ktoré sú nevyhnutné pre správne pomenovanie zariadení používaných v automatizácii a činností v nich vykonávaných.

Procesy predstavujú vnútorné vzťahy v systéme, t.j. spôsob transformácie vstupov do systému na výstupy. *Činnosť* je výsledok procesu, t.j. proces predstavuje realizáciu činností. Základné procesy sú výkonné a riadiace [8, 15]:

- **výkonné procesy** - uskutočňujú výkonnú činnosť. V technických systémoch sú to hmotné transformácie a na ich uskutočnenie je potrebná energia. Výkonné procesy ďalej delíme na:
 - *technologické procesy* - sú výkonné procesy, v ktorých sa uskutočňuje spracovanie (transformácia vstupných materiálov),
 - *výrobné procesy* - sú výkonné procesy, v ktorých sa uskutočňuje výroba výrobkov, pozostávajúca z technologických a manipulačných procesov.
- **riadiace procesy** - zabezpečujú riadenie, t.j. uskutočňovanie výkonných procesov. Nazývajú sa tiež kybernetické. Uskutočňujú sa v nich riadiace činnosti.

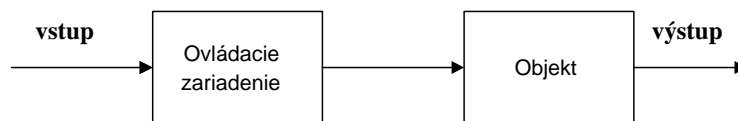
Ďalšími dôležitými pojmami sú *automatizácia* a *regulácia*. Pod automatizáciou rozumieme používanie takých zariadení, ktoré oslobodzujú človeka nielen od fyzickej ale aj duševnej riadiacej práce. Jednotlivé dielčie činnosti čiastočne alebo úplne preberajú automaty alebo počítače. *Regulácia* je udržiavanie určených veličín procesu na vopred určených, najčastejšie na konštantných hodnotách.

Základnou úlohou systémov riadenia je realizácia automatického riadenia vo forme automatizovaných systémov riadenia technologických procesov (ASRTP). ASRTP patrí medzi významné oblasti aplikácie kybernetiky, ktorá je jeho teoretickým základom. Všeobecnosť teórie automatického riadenia (TAR) umožňuje vyvinúť systémy riadenia pre rôzne objekty podľa jednotlivých princípov, berúc do úvahy zvláštnosti týchto objektov len pri projektovaní informačného systému a vstupu riadiacich akcií do objektu.

1.2 Spôsohy riadenia

V TAR rozlišujeme tri základné typy riadenia, ktoré sa využívajú jednotlivo alebo vo vzájomnej kombinácii pri tvorbe ASRTP. Patria sem [4, 5, 8]:

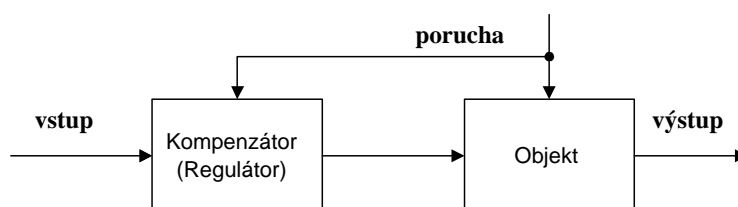
1. *Dopredné riadenie:*



Obr. 1: Dopredné riadenie.

Tento spôsob otvoreného riadenia je zobrazený na Obr. 1. Žiadaná výstupná hodnota je privádzaná do ovládacieho zariadenia, ktoré dopredu podľa daného programu nastavuje riadiacu veličinu objektu.

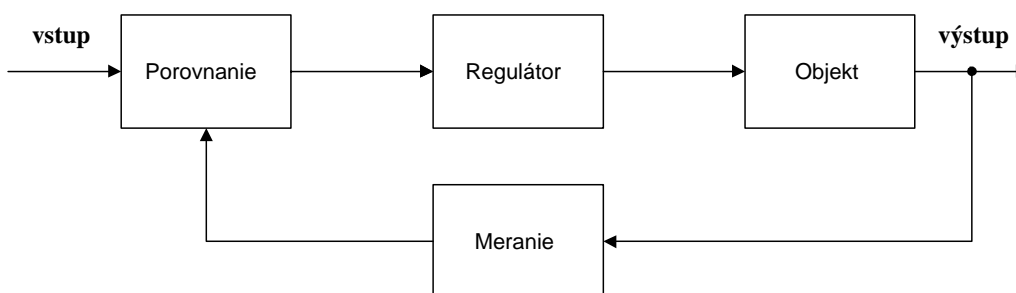
2. *Kompenzačné riadenie:*



Obr. 2: Kompenzačné riadenie.

Kompenzačný spôsob riadenia je zobrazený na Obr. 2. Je to tiež otvorený riadiaci obvod. Žiadaná výstupná hodnota je privádzaná do kompenzátora, resp. regulátora, ktorý upravuje aj vzhľadom na pôsobiacu poruchu riadiacu veličinu objektu. Toto riadenie kompenzuje vplyv okolia na objekt.

3. *Spätnoväzobné riadenie:*

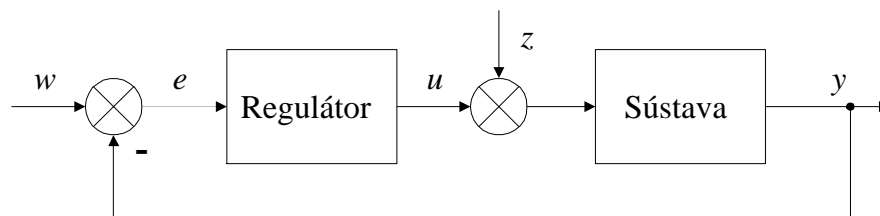


Obr. 3: Spätnoväzobné riadenie.

Uzavreté riadenie zobrazené na Obr. 3 je spätnoväzobné. Žiadaná hodnota je porovnávaná s meranou skutočnou hodnotou. Na základe vzniknutého rozdielu (chyby) regulátor upravuje riadiacu veličinu objektu.

1.3 Spätnoväzobný regulačný obvod

V ďalšom budeme pre názornosť používať spätnoväzobný tvar regulačného obvodu, ktorý je zobrazený na Obr. 4.



Obr. 4: Spätnoväzobný regulačný obvod.

Vo spätnoväzobnom regulačnom obvode sú na popis využité procesné veličiny, ktoré sú uvedené v časti 1.1, v Tab. č. 1.

Do rozdielového člena regulačného obvodu vstupuje žiadaná hodnota w a skutočná riadená veličina y . Výsledným rozdielom je regulačná odchýlka e , $e = w - y$. Regulačná odchýlka e vstupuje do regulátora, ktorý na jej základe stanoví riadiacu veličinu u . Riadiaca veličina u a tiež poruchová veličina z vstupujú do riadeného objektu. Pomocou riadiacej veličiny u sa stanovuje žiadaný výstup z objektu. Priamy zásah na objekte sa vykonáva tzv. akčnou veličinou a , pre ktorú platí: $a = f(u)$. Vo viacerých prípadoch je žiadanou hodnotou konštanta. Vtedy hovoríme o regulácii na konštantnú hodnotu. Tento základný typ spätnoväzobného riadenia sa niekedy nazýva aj *stabilizácia*.

Príklad 1.1. Typickým jednoduchým príkladom na spätnoväzobné riadenie môže byť napríklad vykurovanie rodinného domu. V takom prípade ide o reguláciu teploty vnútorného prostredia. Teplota vnútorných priestorov je snímaná teplomerom. Nameraný údaj je porovnávaný s požadovanou nastavenou teplotou a vzniknutý rozdiel je privedený do regulátora. Regulátor potom nastavuje riadiacu veličinu (napr. množstvo plynu v prípade vykurovania plynom). Vykurovanie rodinného domu by sa dalo riešiť aj programovým riadením alebo aj kompenzačným riadením.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Popíšte základné veličiny automatického riadenia.
2. Definujte proces a vymenujte základné procesy.
3. Čo je to automatizácia ?
4. Čo je to regulácia ?
5. Aká je základná úloha ASRTP a TAR ?
6. Vymenujte a popíšte základné spôsoby riadenia.
7. Nakreslite a popíšte spätnoväzobný regulačný obvod.
8. Uveďte príklady na spätnoväzobné riadenie.

2 Laplaceova transformácia

2.1 Definícia a vlastnosti Laplaceovej transformácie (LT)

Laplaceova transformácia (LT) je typom integrálnej transformácie a predstavuje matematický aparát, ktorý zjednodušuje analýzu a syntézu regulačných obvodov. Je definovaná nasledujúcim vzťahom (napr. [1, 4, 5, 6, 11], atď.):

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1)$$

Inverzná LT je definovaná ako

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (2)$$

kde $p = r + i\omega$ je komplexné číslo a c je konštanta zvolená tak, aby v polrovine $Re(p) > c$ nemala funkcia $F(p)$ žiadne singulárne body.

Aby funkcia $f(t)$ bola transformovateľná do Laplaceovej oblasti p , musí vyhovovať nasledujúcej podmienke:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{rt} dt < \infty,$$

kde $r \in (-\infty, \infty)$ a $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

Medzi základné vlastnosti LT patria:

1. *Linearita a superpozícia:*

$$k_1 f_1(t) \pm k_2 f_2(t) \pm \dots \quad \div \quad k_1 F_1(p) \pm k_2 F_2(p) \pm \dots$$

2. *Zmena merítka:*

$$f(at) \quad \div \quad \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

3. *Posun v originále:*

$$f(t - a) \quad \div \quad e^{-at} F(p)$$

4. *Posun v obraze:*

$$e^{-at} f(t) \quad \div \quad F(p + a)$$

5. *Konvolúcia:*

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \quad \div \quad F_1(p) \cdot F_2(p)$$

6. *Derivovanie v obraze:*

$$t \cdot f(t) \quad \div \quad -\frac{dF(p)}{dp}$$

7. Derivovanie podľa inej premennej:

$$\frac{\partial f(t, a)}{\partial a} \quad \div \quad \frac{\partial F(p, a)}{\partial a}$$

8. Derivovanie v originále:

$$\frac{d^{(n)}}{dt^n} f(t) \quad \div \quad p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

9. Integrovanie v obraze:

$$\frac{1}{t} f(t) \quad \div \quad \int_p^\infty F(p) dp$$

10. Integrovanie podľa inej premennej:

$$\int_{b_0}^{b_1} f(t, a) da \quad \div \quad \int_{b_0}^{b_1} F(p, a) da$$

11. Integrovanie v originále:

$$\underbrace{\int \dots \int}_{n\text{-krát}} f(t) dt^n \quad \div \quad \frac{1}{p^n} F(p)$$

12. Veta o počiatocnej hodnote:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad \div \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

13. Veta o konečnej hodnote¹:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad \div \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

2.2 Výpočet LT integrovaním

Výpočet integrovaním je možné realizovať využitím vzťahu (1) pre priamu LT. Získané určité integrály potom riešime priamo alebo pomocou metódy *per partes*, pretože jadrom LT je exponenciálna funkcia e^x .

Príklad 2.1. Vypočítajte LT funkcie $\mu(t-a)$, (posunutý jednotkový skok). S využitím definičného vzťahu (1) alebo vlastnosti 3, dostávame nasledujúci integrál:

$$\mathcal{L}\{\mu(t-a)\} = \int_0^\infty \mu(t-a)e^{-pt} dt = \int_a^\infty e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_a^\infty = \frac{1}{p} e^{-ap}$$

¹Túto vetu nie je možné použiť v prípade ak polynóm v menovateli funkcie $F(p)$ má kladné korene (póly), to znamená, že ide o nestabilný systém.

Príklad 2.2. Vypočítajte LT funkcie $f(t) = \cos(\omega t)$. S využitím definičného vzťahu (1) a Eulerových vzťahov (pozri Prílohu 3), dostávame nasledujúci integrál:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{i\omega t - pt} + e^{-i\omega t - pt}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{i\omega t - pt}) dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty (-e^{i\omega t - pt}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{t(i\omega - p)}}{i\omega - p} \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{t(-i\omega - p)}}{-i\omega - p} \right]_0^\infty = -\frac{1}{2} \frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{2} \frac{1}{i\omega + p} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\omega + p} - \frac{1}{i\omega - p} \right) = \frac{1}{2} \frac{-2p}{i^2\omega^2 - p^2} = \frac{p}{\omega^2 + p^2} \end{aligned}$$

Túto úlohu je možné vyriešiť aj pomocou metódy integrovania *per partes*.

2.3 Výpočet LT cez transformačný slovník

Väčšinu funkcií používaných v TAR je možné previesť do Laplaceovej oblasti priamo pomocou transformačného slovníka, ktorý je uvedený v Prílohe 1. Niektoré zložitejšie funkcie sa dajú rozložiť alebo zjednodušiť pomocou známych vzťahov a potom previesť do oblasti Laplaceových obrazov.

Príklad 2.3. Vypočítajte LT funkcie $f(t) = \sin(\omega t)$. S využitím transformačného slovníka a Eulerových vzťahov (pozri Prílohu 3), dostávame vzťah:

$$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}$$

LT potom určíme pomocou transformačného slovníka (pozri Prílohu 1) pre funkciu e^{-at} ako

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2i} \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + i\omega} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

2.4 Výpočet inverznej LT

Pri riešení problémov je potrebná možnosť spätného prechodu od obrazu k originálu funkcie. Táto operácia sa spravidla robí vyhľadávaním v Laplaceovom transformačnom slovníku. Často je potrebné urobiť určité úpravy funkcie ako je to ilustrované na nasledujúcom príklade [7].

Príklad 2.4. Určte inverznú LT funkcie $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$ s využitím transformačného slovníka. Úpravou zlomku dostávame nasledujúci tvar:

$$F(p) = \frac{p}{(p - 1)^2 + 4}$$

podľa vety o posunutí potom dostávame: $F(p + 1) = \frac{p+1}{p^2+2^2}$

Tento výraz je pomocou transformačného slovníka upravený na tvar:

$$e^{-t} f(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t)$$

odkiaľ potom dostávame inverznú transformáciu funkcie v tvare:

$$f(t) = e^t \left(\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right)$$

V niektorých prípadoch je Laplaceov obraz funkcie zložitý a inverzná transformácia sa nedá urobiť priamo. Ak funkcia má tvar:

$$F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \dots + a_1 p + a_0}{p^q + b_{q-1} p^{q-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

kde $R(p)$ a $Q(p)$ sú polynómy premennej p , pričom $Q(p)$ je vyššieho stupňa ako $R(p)$, ($q > r$), potom sa dá rozložiť na parciálne zlomky. Laplaceova transformácia môže byť potom vyjadrená ako rad parciálnych zlomkov. V prípade jednoduchých pólov je počet zlomkov rovný q , ktoré sú vyjadrené ako

$$F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_q}{p - p_q}$$

Inverziou každého člena pravej strany dostaneme originál transformovanej funkcie $f(t)$.

Táto metóda sa dá výhodne použiť vtedy, ak má menovateľ jednoduché póly. V prípade viacnásobných pólov a komplexne združených pólov je výpočet veľmi zdĺhavý a náročný. V takýchto prípadoch je výhodné použiť iné metódy výpočtu koeficientov (pozri napr. [2, 1, 4, 5, 7], atď.).

Príklad 2.5. Určte inverznú LT funkcie $F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p+3)}$ s využitím rozkladu na parciálne zlomky. Úpravou zlomku dostávame nasledujúci tvar:

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p+3)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1} + \frac{A_3}{p+3}$$

Roznásobením a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách potom pre koeficienty A_1, A_2 a A_3 dostávame:

$$A_1 = [pF(p)]_{p=0} = \left[\frac{p+2}{(p+1)(p+3)} \right]_{p=0} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = [(p+1)F(p)]_{p=-1} = \left[\frac{p+2}{p(p+3)} \right]_{p=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = [(p+3)F(p)]_{p=-3} = \left[\frac{p+2}{p(p+1)} \right]_{p=-3} = -\frac{1}{6}$$

Inverzná Laplaceova transformácia potom je: $f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. S využitím vzťahu pre priamu LT, Eulerových vzťahov a metódy *per partes* určte obrazy časových funkcií $f(t) := \{ \delta(t), \mu(t), t, t^2, e^{-\alpha t}, \sin(\omega t), \cos(\omega t) \}$.
2. Dokážte platnosť vety o linearite LT na funkcii $f(t) = 3t + 2e^{-3t}$.
3. Určte inverznú LT k funkcii $F(p) = \frac{K_1}{p-a} + \frac{K_2}{p-b} + \frac{K_3}{p-c}$.

3 Analytické modely spojitých systémov

3.1 Matematické modely dynamických systémov

Pri tvorbe matematických modelov dynamických systémov sa obmedzíme iba na kybernetické modely. Tento makropriístup študuje chovanie systému z hľadiska vstupu a výstupu. Tieto modely sa dajú popísať pomocou lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Všeobecný tvar takejto diferenciálnej rovnice sa dá zapísať ako

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t), \quad (3)$$

kde $u(t)$ je vstup do systému a $y(t)$ je výstup zo systému.

Pre názornosť budeme ďalej uvažovať matematické modely popísané diferenciálnymi rovnicami prvého rádu (jednokapacitné sústavy) v tvare:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (4)$$

a matematické modely popísané diferenciálnymi rovnicami druhého rádu (dvojkapacitné sústavy) v tvare:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (5)$$

Matematické modely vyšších rádov budú tiež spomenuté ale nebudú riešené.

Laplaceovou transformáciou diferenciálnej rovnice (3) a následnou úpravou dostaneme prenosovú funkciu systému, ktorú môžeme zapísať ako

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (6)$$

Diferenciálnej rovnici prvého rádu (4) zodpovedá prenosová funkcia sústavy

$$F_s(p) = \frac{1}{a_1 p + a_0} \quad (7)$$

a diferenciálnej rovnici druhého rádu (5) zodpovedá prenosová funkcia sústavy

$$F_s(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (8)$$

V prípade ak matematický model sústavy nemá prenosovú zložku a_0 , potom hovoríme o *astatickej* sústave. Jednoduchým príkladom môže byť nádoba bez výtoku. Prenosová funkcia takejto sústavy má tvar: $F(p) = 1/p$. Je to integrátor. Ďalším prípadom je napríklad satelitná anténa. Prenosová funkcia má tvar: $F(p) = 1/p^2$. Ide o dvojitý integrátor.

Ďalším používaným spôsobom vyjadrenia matematického modelu je zápis v stavovom priestore. Pri tomto vyjadrení sa využívajú stavové premenné systému. Lineárny systém s konečnou dimenziou n sa dá zapísať ako

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \mathbf{A} x(t) + \mathbf{B} u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C} x(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

pre $x(0) = x_0$, pričom \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} sú matice a kde $x(t)$ je stavová premenná. Tento zápis zohľadňuje poznatky aj o vnútornej štruktúre systému.

3.2 Klasické metódy riešenia diferenciálnych rovníc

Z matematického hľadiska je diferenciálna rovnica (3) nehomogénna diferenciálna rovnica, ktorej riešením je súčet:

$$y(t) = y_h(t) + y_n(t),$$

kde $y_h(t)$ je riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice (prechodová zložka) a $y_n(t)$ je partikulárne riešenie (prenosová zložka). Aby bolo možné riešiť takúto diferenciálnu rovnicu, musia byť zadané aj počiatočné podmienky $y(0)$ a $y'(0)$.

Uvažujme všeobecný prípad diferenciálnej rovnice druhého rádu (5). Riešenie nájdeme tak, že najprv vyriešime homogénnu diferenciálnu rovnicu a potom nájdeme partikulárne riešenia podľa typu pravej strany. Homogénna diferenciálna rovnica má tvar

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice potom je

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Korene charakteristickej rovnice sa dajú nájsť podľa vzorca:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2}, \quad D = a_1^2 - 4a_2 a_0$$

Poznámka: Aby bol systém fyzikálne realizovateľný, musí byť splnená nasledujúca podmienka:

$$a_2 > 0 \quad \wedge \quad a_1 \geq 0 \quad \wedge \quad a_0 \geq 0.$$

Podľa hodnoty diskriminantu D môžeme dostať nasledujúce tvary riešenia $y_h(t)$ homogénnej diferenciálnej rovnice:

1. $D > 0$: $y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$,
2. $D = 0$: $y_h(t) = C_1 t^0 e^{rt} + C_2 t^1 e^{rt}$,
3. $D < 0$: $y_h(t) = e^{Re(r_1)t} (C_1 \cos(Im(r_1)t) + C_2 \sin(Im(r_2)t))$.

Partikulárne riešenia $y_n(t)$ sa vo všeobecnosti hľadajú pomocou Wronského determinantu. Pre niektoré jednoduché prípady funkcií na pravej strane, používaných v TAR, je možné nájsť partikulárne riešenia aj jednoduchším spôsobom. Napríklad ak pravá strana diferenciálnej rovnice má tvar:

$$u(t) = e^{\alpha t} [P_1(t) \cos(\beta t) + P_2(t) \sin(\beta t)],$$

vtedy partikulárne riešenie dostaneme pomocou vzorca

$$y_n(t) = t^k e^{\alpha t} [R_1(t) \cos(\beta t) + R_2(t) \sin(\beta t)],$$

kde $R_1(t)$ a $R_2(t)$ sú mnohočleny takého stupňa, ako je vyšší zo stupňov mnohočlenov $P_1(t)$ a $P_2(t)$ a číslo k vyjadruje násobnosť koreňa $\alpha \pm i\beta$ charakteristickej rovnice.

Ak je na pravej strane diferenciálnej rovnice konštanta K , potom je možné riešenie nájsť spôsobom, ktorý je uvedený v nasledujúcom príklade.

Príklad 3.1. Analyticky nájdite riešenie nasledujúcej diferenciálnej rovnice

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 1$$

pre nulové počiatkové podmienky: $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Charakteristická rovnica je: $r^2 + 3r + 2 = 0$. Diskriminant $D > 0$, korene charakteristickej rovnice sú: $r_1 = -1$ a $r_2 = -2$ (stabilná sústava). Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice má potom tvar:

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

V prípade ak $u(t) = 1$, analytickým riešením diferenciálnej rovnice je prechodová charakteristika a $y_n(t) = K$. Dosadením do diferenciálnej rovnice dostávame $0 + 3 \cdot 0 + 2K = 1 \Rightarrow K = 1/2 = 0.5$. Riešenie diferenciálnej rovnice potom je

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 0.5$$

Konštanty C_1 a C_2 určíme z počiatkových podmienok. Zderivujeme analytické riešenie podľa t , dostaneme $y'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$. Dosadíme počiatkové podmienky a dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Vyriešením tejto sústavy získame konštanty $C_1 = -1$ a $C_2 = 0.5$. Hľadané analytické riešenie (prechodová charakteristika sústavy) nehomogénnej diferenciálnej rovnice má výsledný tvar:

$$y(t) = -e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 0.5 = 0.5(1 - e^{-t})^2$$

Pre $t = 0$, $y(0) = 0$ a pre $t = \infty$ je prenosová zložka $y(\infty) = 0.5$.

3.3 Riešenia diferenciálnych rovníc pomocou LT

Diferenciálne rovnice je možné riešiť aj pomocou LT. Ide o silný matematický nástroj, kde sa diferenciálne rovnice s počiatkovými podmienkami transformujú do oblasti Laplaceových obrazov ako algebraické rovnice. Vyriešením algebraických rovníc a inverznou LT je potom možné nájsť originál riešenia v časovej oblasti.

Príklad 3.2. Pomocou LT nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2u(t),$$

pre počiatkové podmienky: $y(0) = 1, y'(0) = 0$ a kde $u(t) = \mu(t)$, (jednotkový skok).

Aplikovaním LT na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice dostaneme výraz

$$[p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)] + 4[pY(p) - y(0)] + 3Y(p) = 2U(p)$$

V prípade pôsobenia jednotkového skoku na vstup je $U(p) = \frac{1}{p}$. Dosadením počiatkových podmienok a LT jednotkového skoku potom dostávame

$$Y(p)[p^2 + 4p + 3] - [p + 4] = \frac{2}{p}$$

Úpravou a rozložením polynómu dostávame

$$Y(p) = \frac{p+4}{p^2+4p+3} + \frac{2}{p(p^2+4p+3)} = \frac{p+4}{(p+1)(p+3)} + \frac{2}{p(p+1)(p+3)}$$

Rozkladom na parciálne zlomky a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme nasledujúce vyjadrenie

$$Y(p) = \left[\frac{3/2}{(p+1)} + \frac{-1/2}{(p+3)} \right] + \left[\frac{-1}{(p+1)} + \frac{1/3}{(p+3)} \right] + \frac{2/3}{p}$$

Pomocou Laplaceovho transformačného slovníka nájdeme k jednotlivým obrazom originály funkcií. Výsledné analytické riešenie diferenciálnej rovnice je

$$y(t) = \left[\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] + \left[-e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right] + \frac{2}{3}$$

Pre $t \rightarrow \infty$ prechodová zložka zaniká a prenosová zložka je $y(\infty) = 2/3$.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Vysvetlite čo sú to počiatočné podmienky diferenciálnych rovníc.
2. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu

$$y'(t) + 2y(t) = 4$$

pre nulové počiatočné podmienky.

3. Pomocou klasických metód aj pomocou LT riešte diferenciálnu rovnicu:

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = u(t)$$

pre nulové počiatočné podmienky ak $u(t) = \delta(t)$ a ak $u(t) = \mu(t)$.

4. Pomocou klasických metód aj pomocou LT riešte diferenciálnu rovnicu:

$$9y''(t) - 6y'(t) + y(t) = 0$$

pre nulové počiatočné podmienky a tiež pre podmienky: $y(0) = 3$ a $y'(0) = 0$.

5. Pomocou metód LT nájdite analytické riešenia nasledujúcej diferenciálnej rovnice

$$4y''(t) + 8y'(t) + 5y(t) = e^t$$

pre nulové počiatočné podmienky a pre podmienky $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

6. Pomocou metód LT riešte integrálno-diferenciálnu rovnicu

$$y'(t) + 6y(t) + 9 \int y(t) dt = 1$$

pre nulové počiatočné podmienky.

4 Identifikácia spojitých systémov

Hlavnou úlohou identifikácie systému je vyšetrenie dynamických vlastností systému a stanovenie jeho matematického modelu experimentálnym postupom. Pomocou testovacích signálov pôsobíme na systém a zaznamenávame jeho odozvu. Vyhodnocovaním nameraných signálov potom určíme model systému.

V ďalších častiach sú popísané dve jednoduché metódy identifikácie dynamických systémov. Prvá metóda je vhodná pre jednoduché systémy (napr. jednodukapacitné). Druhú metódu môžeme použiť aj pre zložitejšiu štruktúru matematického modelu (napr. dvojkapacitnú sústavu). Obidva uvedené metódy vychádzajú z odozvy nenabudeného systému na jednotkový skok, t.j. z prechodových charakteristík.

4.1 Metóda vyhodnocovania prechodových charakteristík

Pri vyhodnocovaní prechodových charakteristík sa vychádza z toho, že meraním zistíme odozvu $y(t)$ systému na skokovú zmenu vstupného signálu $u(t)$ o známej veľkosti. Systém musí byť pred zmenou v ustálenom stave.

Identifikácia systémov 0-tého rádu:

Takýto systém (proporcionálny) je možné popísať rovnicou v tvare

$$y(t) = Ku(t)$$

V takomto prípade systém predstavuje dynamický člen bez oneskorenia (0-tého rádu) a parameter (zosilnenie) systému sa stanoví z rozdielu ustálených hodnôt ako

$$K = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Identifikácia systémov 1-tého rádu:

Takýto dynamický systém (jednodukapacitný) je možné popísať diferenciálnou rovnicou v tvare

$$Ty''(t) + y(t) = Ku(t)$$

Analytické riešenie takejto diferenciálnej rovnice pri skokovej zmene vstupnej veličiny o Δu bude:

$$y(t) = K\Delta u \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad (10)$$

kde pre K platí:

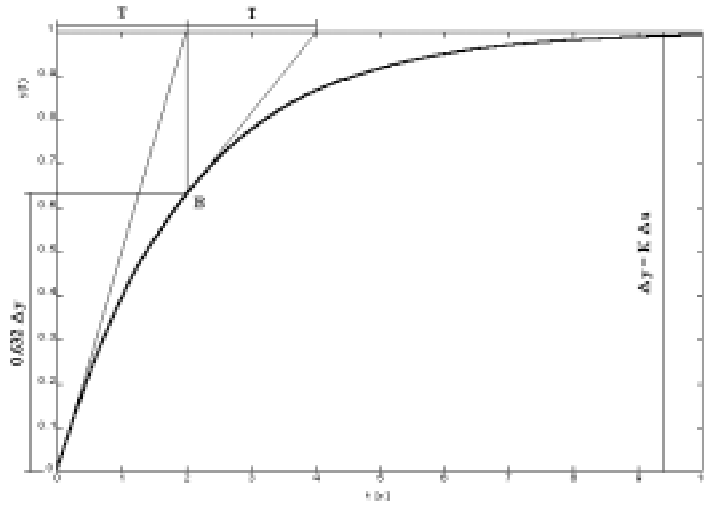
$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Časovú konštantu T môžeme určiť tak, že do vzťahu (10) dosadíme za $t = T$. Potom dostaneme

$$y(t) = K\Delta u(1 - e^{-1}) = 0.632K\Delta u = 0.632\Delta y$$

Pre hodnotu $0.632\Delta y$ (viď Obr. 5) bude časová konštantá daná vzťahom

$$T = \frac{t_B}{K\Delta u} = -\frac{t_B}{\ln\left(1 - \frac{y(t_B)}{K\Delta u}\right)}$$



Obr. 5: Prechodová charakteristika.

Z identifikovaných parametrov T a K je možné jednoduchou úpravou získať koeficienty a_1 a a_0 pre diferenciálnu rovnicu v tvare (4). Pre koeficienty platí vzťah: $a_1 = \frac{T}{K}$ a $a_0 = \frac{1}{K}$.

Identifikácia systémov n -tého rádu:

Pri identifikácii systémov druhého rádu môžeme na stanovenie časových konštánt diferenciálnej rovnice využiť dobu nábehu T_n a dobu prietahu T_u . Podľa existujúcich vzťahov je potom možné stanoviť parametre a_2 , a_1 a a_0 diferenciálnej rovnice (5).

Pre diferenciálne rovnice rádu, $n > 2$ nie je možné explicitne vyjadriť časové konštanty z nameranej prechodovej charakteristiky, ale musíme použiť približné metódy [12] (napr. aproximácia prechodovej charakteristiky sústavou druhého rádu).

4.2 Metóda postupnej integrácie

Táto identifikačná metóda je vhodná aj na určovanie parametrov modelov vyšších rádoov a umožňuje aproximovať aj odozvy na iný vstupný signál ako je jednotkový skok.

Ako príklad je uvedený postup pre stanovenie koeficientov a_2 , a_1 a a_0 diferenciálnej rovnice (5). Predpokladajme, že vstupným signálom bol jednotkový skok $u(t) = \mu(t) = 1$, celkový čas merania odozvy bol T a systém bol v nenabudenom stave (nulové počiatkové podmienky). Pre koeficienty matematického modelu potom platí:

$$a_0 = \frac{u(T) - u(0)}{y(T) - y(0)} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{y(T)} \text{ pre } u(t) = 1 \quad (11)$$

Na stanovenie parametrov a_2 a a_1 je potrebné vypočítať prvú a druhú integrálnu krivku. Pre parameter a_1 platí vzťah, ktorý získame integrovaním diferenciálnej rovnice (5).

$$a_1 = \frac{1}{y(T) - y(0)} \left[a_0 \int_0^T \bar{y}(t) dt - \int_0^T \bar{u}(t) dt \right] \Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{y(T)} \int_0^T \bar{y}(t) dt \text{ pre } u(t) = 1 \quad (12)$$

Ďalšou integráciou a následnou úpravou dostávame vzťah pre výpočet parametra a_2 v tvare:

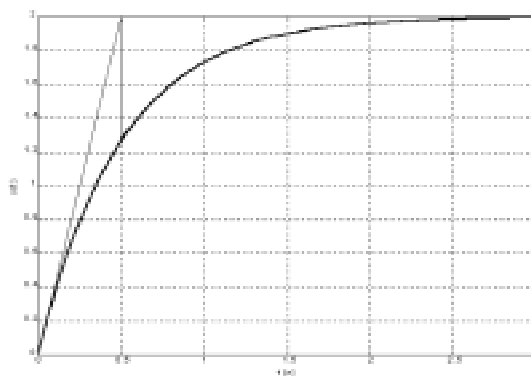
$$a_2 = \frac{1}{y(T)} \left[\int_0^T \int_t^T \bar{u}(t) dt^2 - a_0 \int_0^T \int_t^T \bar{y}(t) dt^2 + a_1 \int_0^T \bar{y}(t) dt \right] \text{ pre } u(t) = 1, \quad (13)$$

kde $\bar{y}(t) = y(T) - y(t)$ a $\bar{u}(t) = u(T) - u(t)$.

Podobným spôsobom by bolo možné nájsť vzťahy aj pre koeficienty diferenciálnej rovnice vyššieho rádu ako 2. Vzhľadom na numerickú integračnú metódu (napr. lichobežníková metóda), ktorú budeme používať na experimentálne spracovanie dát, je potrebné zvážiť maximálny rád matematického modelu, pretože chyba pri výpočte potom rastie nad prijateľnú hranicu.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Pomocou metódy vyhodnocovania prechodových charakteristík určte parametre a_1 a a_0 diferenciálnej rovnice prvého rádu (4), ak nameraná prechodová charakteristika systému je zobrazená na Obr. 6.



Obr. 6: Nameraná prechodová charakteristika.

2. Pomocou metódy postupnej integrácie určte parametre a_2 , a_1 a a_0 diferenciálnej rovnice druhého rádu (5), ak pri pôsobení jednotkového skoku na vstup systému, boli pre čas $T = 6$ [s] namerané hodnoty výstupného signálu, ktoré sú uvedené v Tab. č. 2. Pred meraním bol systém v nenabudenom stave.

Tab. č. 2: Experimentálne namerané dáta.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	0.26	0.62	1.26	1.50	1.67	1.80	1.88	1.94	1.97	1.99	2.00	2.00

Na numerické integrovanie použite lichobežníkovú metódu integrovania, pre ktorú platí:

$$\int_0^T y(t) dt \approx \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} y_i + \frac{y_N}{2} \right) h,$$

pre $N = T/h$, kde h je časový krok výpočtu a N je počet nameraných vzoriek.

5 Modelovanie spojitých systémov cez SIPRO

SIPRO je jednoduchý ale vyhovujúci simulačný program. Pre účely predmetu TAR je možné využiť ho na simuláciu a vyšetrovanie niektorých vlastností regulovaných sústav ale aj regulačných obvodov. Modelovanie spojitých systémov je možné urobiť pomocou metódy znižovania rádu derivácie alebo cez definované prenosové bloky.

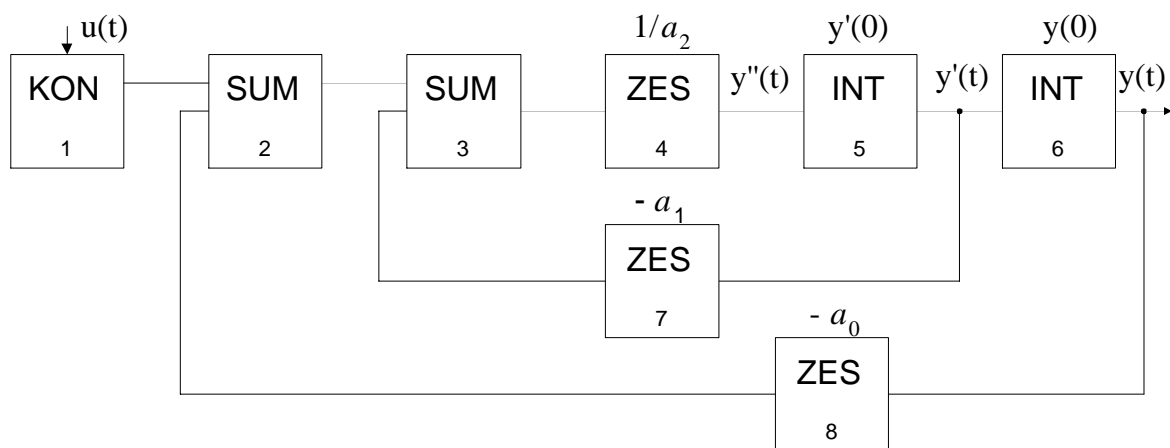
5.1 Metóda znižovania rádu derivácie

Tento prístup je ukázaný na príklade modelovania a simulácie dvojkapacitnej sústavy, ktorú môžeme popísať diferenciálnou rovnicou druhého rádu (5). Z tejto diferenciálnej rovnice vyjadríme najvyššiu deriváciu, pričom dostávame rovnicu v tvare [2]:

$$y''(t) = \frac{[u(t) - a_0y(t) - a_1y'(t)]}{a_2}$$

Túto rovnicu môžeme namodelovať pomocou zosilňovačov, konštánt, sumátorov a následným dvojnásobným integrovaním získame analytické riešenie $y(t)$.

Bloková schéma namodelovanej diferenciálnej rovnice (5) je zobrazená na Obr. 7. Počiatočné podmienky sú zadané v $y'(0)$ a $y(0)$. Budiaca funkcia $u(t)$ je pre prípad



Obr. 7: Bloková schéma pre SIPRO.

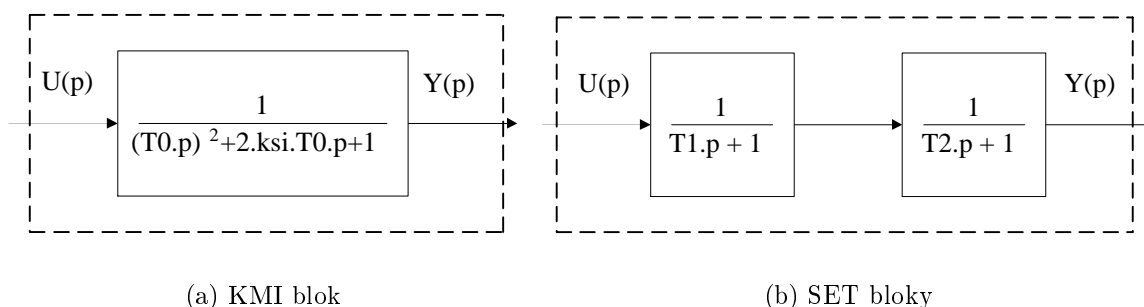
jednotkového skoku zadaná v bloku č. 1 ako KON=1. Prechodovú charakteristiku získame ako výstup z bloku č. 6 v podobe grafu alebo tabuľky vypočítaných hodnôt pre zadaný čas simulácie a krok riešenia.

5.2 Modelovanie cez prenosové bloky

Táto metóda modelovania je jednoduchšia na zadávanie blokov a parametrov do SIPRA. Vyžaduje aby bol známy obrazový prenos modelovaného dynamického systému. Diferenciálnej rovnici druhého rádu (5) zodpovedá prenosová funkcia v tvare:

$$F(p) = \frac{1}{a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

Tento prenos môžeme v závislosti od koreňov v menovateli namodelovať pomocou blokov SET alebo KMI. Tvar prenosových blokov je zobrazený na Obr. 8. Jednotlivé bloky pou-



Obr. 8: Modelovanie cez prenosové funkcie.

žívame podľa hodnoty diskriminantu charakteristickej rovnice. Pre $D > 0$ využijeme dva SET bloky na základe rozkladu charakteristickej rovnice na súčin koreňových činiteľov:

$$F(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{1}{a_2} \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)}, \text{ kde } p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Úpravou potom dostávame

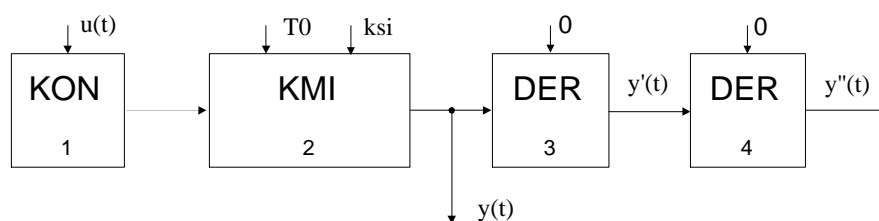
$$F(p) = \frac{1}{p_1 p_2} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{p_1} p + 1\right) \left(-\frac{1}{p_2} p + 1\right)} = \frac{1}{p_1 p_2} \cdot \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

Tento prenos bude modelovaný cez dva SET bloky a jeden blok KON so vstupnou hodnotou $u(t) = 1/(p_1 p_2)$.

Pre $D \leq 0$ využijeme ako základný blok KMI, pre ktorý musíme $F(p)$ upraviť na štandardizovaný tvar pre SIPRO.

$$F(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{\frac{1}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} p^2 + \frac{a_1}{a_0} p + 1} = \frac{\frac{1}{a_0}}{\left[\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\right) p\right]^2 + 2 \cdot \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} p + 1}$$

Vstupom do KMI bloku potom budú konštanty: $T_0 = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$ a $\text{ksi} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$ a vstupom do bloku KON bude $u(t) = 1/a_0$.



Obr. 9: Bloková schéma pre SIPRO.

Bloková schéma namodelovanej diferenciálnej rovnice (5) cez prenosové bloky je zobrazená na Obr. 9.

Prechodovú charakteristiku získame ako výstup z bloku č. 2 v podobe grafu alebo tabuľky vypočítaných hodnôt pre zadaný čas simulácie a krok riešenia.

Príklad 5.1. Namodelujte diferenciálnu rovnicu druhého rádu pomocou metódy prenosových blokov. Diferenciálna rovnica má tvar:

$$0.7414y''(t) + 0.2313y'(t) + 1 = u(t)$$

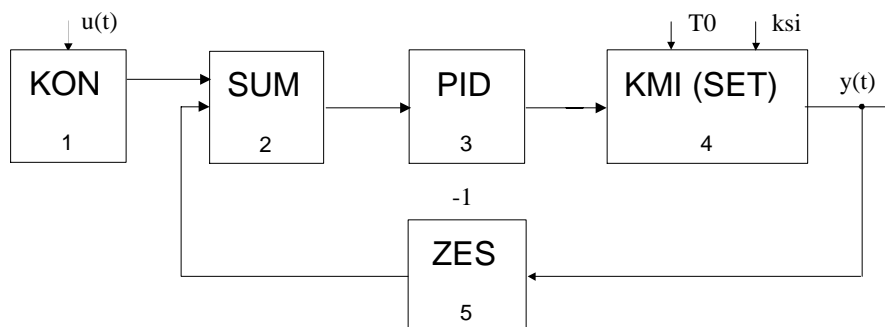
ak vstupom $u(t)$ je jednotkový skok a počiatkové podmienky sú nulové.

Na modelovanie využijeme blokovú schému zobrazenú na Obr. 9, pretože diskriminat charakteristickej rovnice je $D < 0$. Charakteristická rovnica má komplexne združené korene $p_{1,2} = -1.55598 \pm 1.15085i$. Konštanty pre KMI blok budú:

$$T0 = 0.8610, \quad ksi = 0.1343,$$

a hodnota bloku KON bude rovná 1.

Na modelovanie spätnoväzobného regulačného obvodu môžeme využiť prenosové bloky a zostaviť blokovú schému, ktorá je zobrazená na Obr. 10.



Obr. 10: Bloková schéma pre SIPRO.

Regulovaná sústava môže byť modelovaná cez KMI alebo SET bloky a regulátor môže byť modelovaný cez prenosový blok PID alebo pre jednotlivé partikulárne prípady regulátora cez prenosové bloky PDR a PIR, atď. Pri zadávaní parametrov regulátora je potrebné upraviť konštanty na štandardizovaný tvar pre SIPRO.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Namodelujte diferenciálnu rovnicu prvého rádu pomocou metódy znižovania rádu derivácie a pomocou prenosových blokov,

$$y'(t) + 2y(t) = 4$$

pre nulové počiatkové podmienky a nájdite jej analytické riešenie.

2. Namodelujte diferenciálnu rovnicu druhého rádu a nájdite jej analytické riešenie pomocou metódy znižovania rádu derivácie a pomocou prenosových blokov,

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = u(t)$$

pre nulové počiatkové podmienky ak $u(t) = \mu(t)$.

6 Vyšetřovanie charakteristík spojitéch systémov

Dynamické vlastnosti sledovaného systému je možné vyjadriť aj graficky, a to v tvare rôznych charakteristík. Tieto charakteristiky sa dajú stanoviť z diferenciálnej rovnice resp. prenosovej funkcie výpočtom alebo ich môžeme určovať experimentálne, vybudením systému z jeho rovnovážneho stavu aplikáciou definovaného signálu $u(t)$ na vstup systému. Najčastejšie sa umelo vyvoláva zmena vstupnej veličiny vo forme skoku, impulzu alebo harmonicky premenného signálu. Pre výstupnú veličinu zo sústavy potom dostávame funkčný vzťah, ktorého grafické znázornenie je prechodová, impulzová alebo frekvenčná charakteristika. V technickej praxi sa na vyšetřovanie dynamických vlastností ešte používajú vstupné veličiny vo forme rampovej funkcie a náhodného vstupného signálu (biely šum).

6.1 Vyšetřovanie impulzových a prechodových charakteristík

Impulzová funkcia je odozva nenabudenej sústavy (pri nulových počiatkových podmienkach) na Diracov (jednotkový) impulz privedený na jej vstup ($u(t) = \delta(t)$). Grafickým znázornením časového priebehu impulzovej funkcie dostávame impulzovú charakteristiku.

Pretože Laplaceov obraz jednotkového impulzu je rovný jednej, tak impulzovú funkciu dostávame priamo z obrazového prenosu použitím spätnej Laplaceovej transformácie. Takže obrazový prenos systému je súčasne Laplaceovým obrazom impulzovej funkcie. Prechodová charakteristika je integrálom impulzovej charakteristiky podľa času a opačne. Ak je známa jedna z uvedených charakteristík, potom druhú je možné vypočítať integrovaním resp. derivovaním podľa času [1, 4, 5]:

$$y_{prech}(t) = \int_0^t y_{imp}(\tau) d\tau, \quad \text{resp.} \quad y_{imp}(t) = \frac{d}{dt} y_{prech}(t)$$

Pretože sa impulzová charakteristika priamo meraním získava ťažko, v teórii automatického riadenia ju určujeme výpočtom. Pre teoretické účely je veľmi výhodným matematickým modelom, lebo je jadrom integrálu konvolúcie, umožňujúceho určiť v časovej oblasti odozvu systému na ľubovoľný vstupný signál.

Prechodová funkcia je definovaná ako odozva, t.j. časový priebeh výstupnej veličiny $y(t)$ nenabudenej sústavy, ak na vstup sústavy začne pôsobiť jednotkový skok, ($u(t) = \mu(t)$). Grafické znázornenie prechodovej funkcie je prechodová charakteristika.

Táto charakteristika je vhodná na sledovanie prenosových vlastností. Je výhodné použiť ju aj u takých prenosových článkov, pre ktoré nemôžeme zostaviť prenosovú rovnicu na základe vnútorných pochodov, pretože nepoznáme ich štruktúru alebo ju nevieme presne matematicky formulovať. Z priebehu prechodovej charakteristiky vieme určiť niektoré kritériá akosti, ako napríklad ustálenú hodnotu, stabilitu, prerégulovanie, dobu regulácie, dobu nábehu, dobu prieťahu, dobu prechodu a tiež regulačnú plochu.

Príklad 6.1. Zostrojte a vyšetřite impulzovú a prechodovú charakteristiku dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou v tvare

$$0.7414y''(t) + 0.2313y'(t) + y(t) = u(t) \quad (14)$$

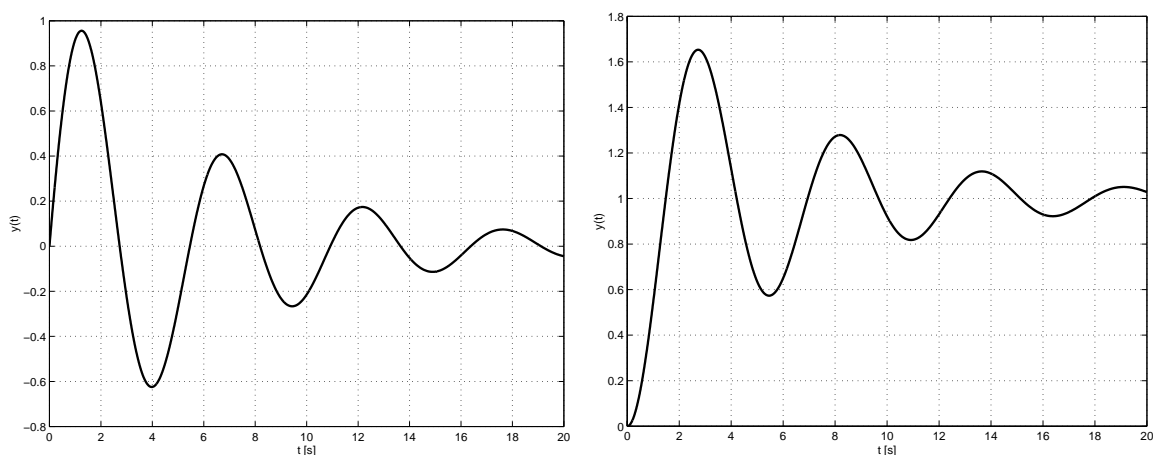
Na zostrojenie impulzovej charakteristiky je potrebné nájsť riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice ($u(t) = \delta(t)$) a toto riešenie graficky znázorniť v závislosti na čase

a na zostrojenie prechodovej charakteristiky je potrebné nájsť úplné analytické riešenie diferenciálnej rovnice ($u(t) = \mu(t)$) a toto riešenie graficky znázorniť v závislosti na čase.

Analytické riešenie (prechodová charakteristika) uvedenej diferenciálnej rovnice nájdeme pomocou metód popísaných v kapitole 3. Pre nulové počiatkové podmienky má nasledujúci tvar:

$$y(t) = 1 - e^{-0.1560t} (\cos(1.1508t) + 0.1355 \sin(1.1508t))$$

Deriváciou prechodovej charakteristiky získame impulzovú charakteristiku.



(a) Impulzová charakteristika

(b) Prechodová charakteristika

Obr. 11: Charakteristiky dynamického systému (14).

Podľa priebehov impulzovej a prechodovej charakteristiky, ktoré sú zobrazené na Obr. 11 môžeme povedať, že ide o kmitavú tlmenú impulzovú a prechodovú charakteristiku.

6.2 Vyšetrovanie frekvenčných charakteristík

Frekvenčný prenos charakterizuje odozvu na harmonický vstupný signál o jednotkovej amplitúde a danej frekvencii ($u(t) = \sin(\omega t)$) za predpokladu, že regulačný pochod prebieha dostatočne dlho, až sa vytvorí ustálený stav. To znamená, že časový priebeh výstupnej veličiny je čisto periodický, bez prechodovej zložky. Pri prenose harmonického vstupného signálu lineárnou prenosovou sústavou je aj výstupný signál harmonickou funkciou času s tou istou frekvenciou, ale s inou amplitúdou a s určitým oneskorením. Frekvenčný prenos $F(i\omega)$ sa rovná obrazovému prenosu $F(p)$, do ktorého namiesto premennej "p" sa dosadí imaginárna kruhová frekvencia "i ω ". Takto definovaný frekvenčný prenos závisí od kruhovej frekvencie ω a predstavuje komplexné číslo, ktorého modul udáva amplitúdu a ktorého argument udáva fázové oneskorenie odozvy na jednotkový harmonický vstupný signál v ustálenom stave. Grafické znázornenie frekvenčného prenosu pre rôzne hodnoty kruhovej frekvencie ω v rozsahu $\omega \in \langle 0; \infty \rangle$ sa nazýva frekvenčná charakteristika. Grafické zobrazenie je možné urobiť niekoľkými spôsobmi. Keďže frekvenčný

prenos predstavuje komplexné číslo, je možné zobraziť ho do Gaussovej komplexnej roviny v závislosti na ω . V takom prípade ide o amplitúdovofázovú (Nyquistovu) frekvenčnú charakteristiku. Veľmi výhodné je zobrazenie frekvenčných charakteristík v logaritmických súradniciach, vtedy hovoríme o logaritmických (Bodeho) frekvenčných charakteristikách. Ďalšie typy frekvenčných charakteristík sú napríklad Michajlovova a Nicholsonova (pozri napr. [4, 6, 17], atď.). Praktický význam frekvenčných charakteristík je v určovaní stability regulačných obvodov z priebehu frekvenčnej charakteristiky.

Príklad 6.2. Zostrojte a vyšetrite Bodeho a Nyquistovu frekvenčnú charakteristiku dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou v tvare

$$0.7414y''(t) + 0.2313y'(t) + y(t) = u(t) \quad (15)$$

Frekvenčný prenos uvedeného systému môžeme zapísať ako

$$F(i\omega) = \frac{1}{0.7414(i\omega)^2 + 0.2313i\omega + 1}$$

Tento frekvenčný prenos upravíme na tvar: $F(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega)$.

Túto úpravu urobíme tak, že frekvenčný prenos vynásobíme komplexne združeným číslom a oddelíme reálnu a imaginárnu časť. Potom dostávame:

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \frac{1}{0.7414(i\omega)^2 + 0.2313i\omega + 1} = \frac{1}{(1 - 0.7414\omega^2) + 0.2313i\omega} = \\ &= \frac{(1 - 0.7414\omega^2) - 0.2313i\omega}{(1 - 0.7414\omega^2)^2 - (0.2313i\omega)^2} = \frac{1 - 0.7414\omega^2}{0.5497\omega^4 - 1.4293\omega^2 + 1} - i \frac{0.2313\omega}{0.5497\omega^4 - 1.4293\omega^2 + 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Postup pre vykreslenie Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky je nasledovný. Určíme hodnoty $F(i\omega)$ v hraničných hodnotách $\omega = 0$ a $\omega = \infty$. Potom určíme priesečníky so súradnicovými osami. Nakoniec pre zvolené hodnoty $\omega \in (0; \infty)$, napríklad $\omega = 1, 2, \dots, 10, 50, 100, \dots$, vypočítame súradnice bodov charakteristiky, ktoré graficky zobrazíme do komplexnej roviny. Grafickým priebehom je potom Nyquistova frekvenčná charakteristika (Obr.12(a)).

Ak vyjadríme zvlášť amplitúdu $A(\omega)$ a fázu $\varphi(\omega)$ frekvenčného prenosu $F(i\omega)$ v závislosti na $\log \omega$, dostávame Bodeho (amplitúdovú a fázovú logaritmickú) frekvenčnú charakteristiku. Pre amplitúdu v decibeloch platí:

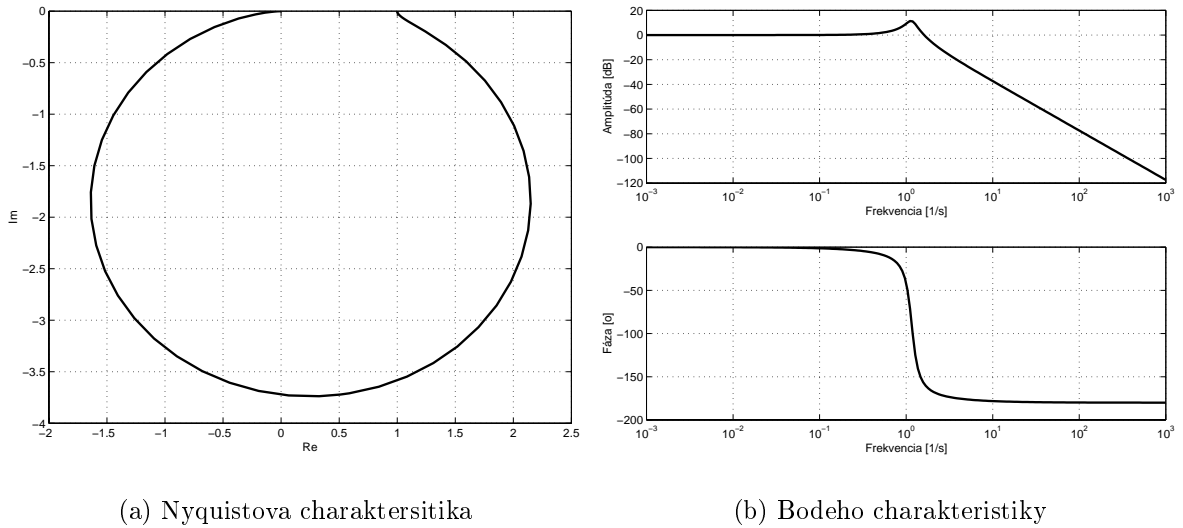
$$A(\omega)[dB] = 20 \log A(\omega) \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

Pre fázu v stupňoch potom platí:

$$\varphi(\omega)[^\circ] = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Bodeho frekvenčná charakteristika je znázornená na Obr. 12(b).

Poznámka: Pri vyšetrowaní frekvenčných charakteristík uzavretých regulačných obvodov je potrebné rozpojiť uzavretý regulačný obvod a stanoviť frekvenčnú charakteristiku z otvoreného regulačného obvodu.



Obr. 12: Frekvenčné charakteristiky dynamického systému (15).

6.3 Vyšetrovanie fázových portrétov

Ak je regulovaná sústava zadaná diferenciálnymi rovnicami v stavovom tvare (9), a ak všetky spĺňajú Lipschitzovu podmienku a podmienku spojitosti v okolí bodu $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), u(t_0), t_0]$, potom v okolí tohoto bodu existuje jediné riešenie $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ sústavy rovníc. Toto riešenie určuje v n -rozmernom stavovom priestore jednoznačnú fázovú trajektóriu. Pre každý konkrétny čas t dostávame v tomto priestore zobrazovací bod. Súhrn všetkých trajektórií vytvára fázový portrét riešenia sústavy. Fázová trajektória podáva úplný obraz o jednom konkrétnom riešení sústavy so zadanými počiatočnými podmienkami a so zadanou vstupnou funkciou $u(t)$. Fázový portrét riešenia podáva úplný obraz vlastností všeobecného riešenia vyšetrovanej sústavy pre zadanú vstupnú funkciu $u(t)$ (pozri napr. [4, 10], atď.).

Príklad 6.3. Zostrojte a vyšetrite fázový portrét dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou (14) z Príkladu 6.1.

Uvedenú diferenciálnu rovnicu prepíšeme na kanonický tvar a riešenia získané vyriešením sústavy diferenciálnych rovníc potom zakreslíme do stavového priestoru. Kanonický tvar diferenciálnej rovnice môžeme v maticovom tvare zapísať ako

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_1 \\ \frac{d}{dt} x_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

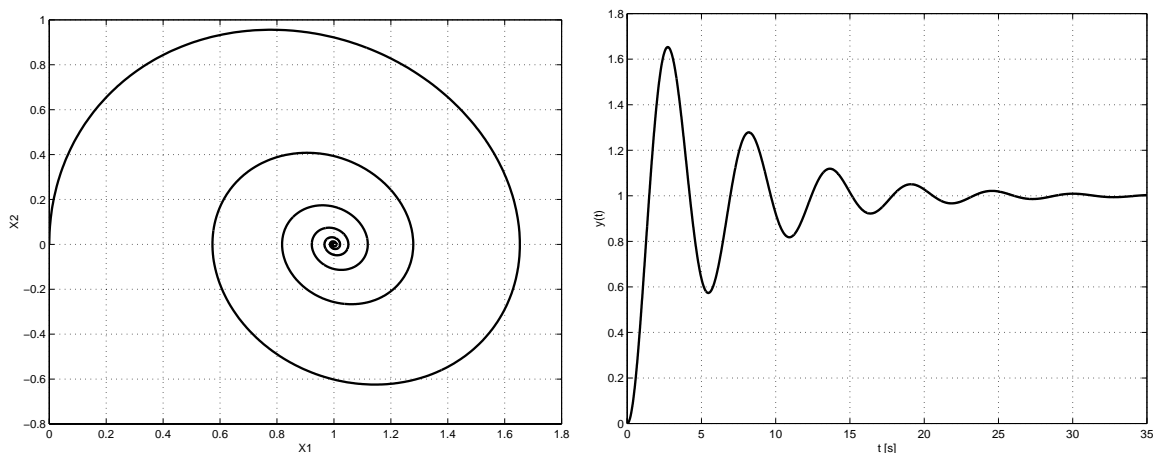
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

kde $u, y \in R$ a $x \in R^n$.

Pre náš zadaný systém (14) dostávame sústavu dvoch diferenciálnych rovníc v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 &= \frac{u(t) - x_1 - 0.2313x_2}{0.7414}\end{aligned}\quad (17)$$

Ak na x -ovú os vynesieme stavovú premennú $x_1 \equiv y(t)$ a na y -ovú os stavovú premennú $x_2 \equiv y'(t)$, potom pre vstupnú budiacu funkciu v tvare jednotkového skoku ($u(t) = \mu(t)$) dostávame fázovú trajektóriu zobrazenú na Obr. 13(a).



(a) Fázový portrét

(b) Prechodová charakteristika

Obr. 13: Charakteristiky dynamického systému (14).

Pre názornosť je na Obr. 13(b) opäť zobrazená aj prechodová charakteristika. Z obrázkov je vidieť vzájomný vzťah medzi charakteristikami (tlmenie prechodového deja).

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Zostrojte a vyšetrite impulzovú, prechodovú a frekvenčnú charakteristiku dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou

$$y'(t) + 2y(t) = 4u(t)$$

pre nulové počiatkové podmienky.

2. Zostrojte a vyšetrite impulzovú, prechodovú a frekvenčnú charakteristiku a tiež fázový portrét dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou

$$4y''(t) + 8y'(t) + 5y(t) = u(t)$$

pre nulové počiatkové podmienky a pre podmienky $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

7 Algebra prenosov

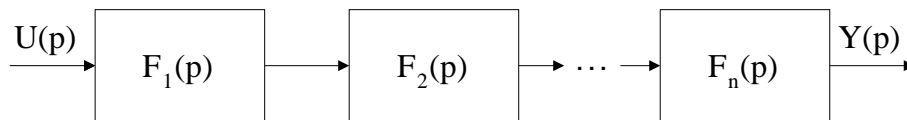
Algebra prenosov je dôležitou pomôckou pri vyšetovaní zložitých regulačných obvodov. Pri práci s prenosovými funkciami sa využívajú blokové schematické znázornenia. Jednotlivé bloky v schéme predstavujú prenosové funkcie. Spájaním takýchto blokov je možné znázorniť celú štruktúru regulačného obvodu. Na stanovenie výslednej prenosovej funkcie obvodu použijeme jednoduché pravidla algebry prenosov.

7.1 Základné zapojenia prenosových blokov

Medzi základné zapojenia algebry prenosov patrí sériové, paralelné a antiparalelné zapojenie prenosových blokov.

Pre sériové zapojenie prenosových blokov zobrazených na Obr. 14 platí:

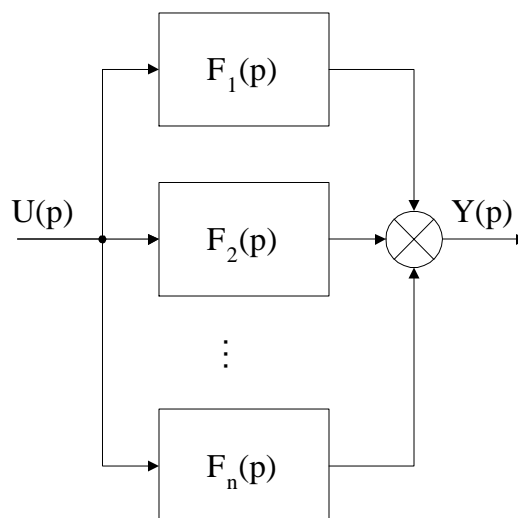
$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = F_1(p) \cdot F_2(p) \cdot \dots \cdot F_n(p) = \prod_{i=1}^n F_i(p)$$



Obr. 14: Sériové zapojenie prenosových blokov.

Pre paralelné zapojenie prenosových blokov zobrazených na Obr. 15 platí:

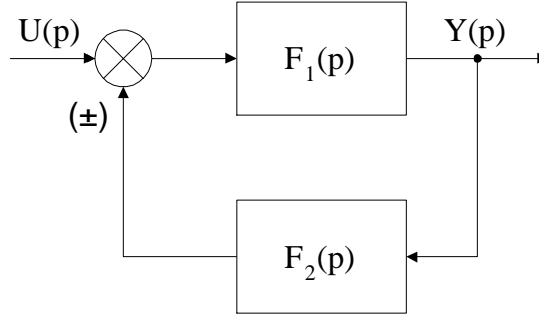
$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p) = \sum_{i=1}^n F_i(p)$$



Obr. 15: Paralelné zapojenie prenosových blokov.

Pre antiparalelné zapojenie prenosových blokov zobrazených na Obr. 16 platí:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{F_1(p)}{1 \mp F_2(p) \cdot F_2(p)}$$



Obr. 16: Antiparalelné zapojenie prenosových blokov.

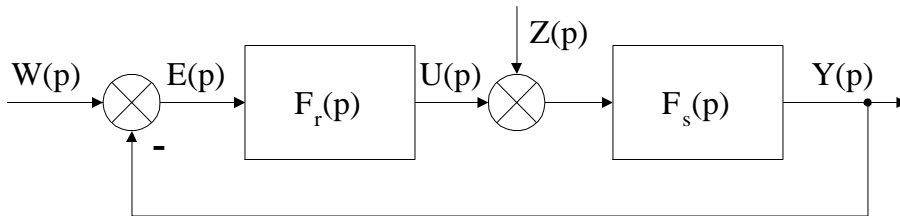
Pre výsledný prenos spätnoväzobného regulačného obvodu (so zápornou spätnou väzbou) zobrazeného na Obr. 17 potom pre prenos vzhľadom na poruchu platí:

$$F_z(p) = \frac{Y(p)}{Z(p)} = \frac{F_s(p)}{1 + F_r(p) \cdot F_s(p)}, \quad (18)$$

a pre prenos vzhľadom na žiadanú hodnotu platí:

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_r(p) \cdot F_s(p)}{1 + F_r(p) \cdot F_s(p)}, \quad (19)$$

kde $F_r(p)$ je prenos regulátora a $F_s(p)$ je prenos regulovanej sústavy.



Obr. 17: Spätnoväzobný regulačný obvod.

Pre prenos otvoreného regulačného obvodu potom platí:

$$F_o(p) = F_r(p) \cdot F_s(p) \quad (20)$$

Pre výsledný prenos $F_w(p)$ vzhľadom na prenos $F_o(p)$, potom dostávame vzťah:

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)}, \quad \text{resp.} \quad F_o(p) = \frac{F_w(p)}{1 - F_w(p)}$$

Výsledný prenos ľubovoľného obvodu je možné odvodiť aj na základe pravidla:

$$F(p) = \frac{\text{prenos priamej vetvy}}{1 \pm \text{prenosy vo všetkých spätnoväzobných slučkách}}$$

7.2 Odvodzovanie diferenciálnych rovníc z prenosov

Na získanie výslednej diferenciálnej rovnice zložitého obvodu je výhodné využiť prenosové funkcie jednotlivých častí obvodu a základné pravidla algebry prenosov. Zo získaného celkového prenosu obvodu je potom možné odvodiť výslednú diferenciálnu rovnicu celého obvodu. Túto rovnicu môžeme potom použiť na vyšetrowanie dynamických vlastností celého obvodu.

Postup odvodzovanie diferenciálnych rovníc z prenosov je ukázaný na nasledujúcom príklade.

Príklad 7.1. Napíšte výslednú diferenciálnu rovnicu spätnoväzobného regulačného obvodu (záporná spätná väzba) vzhľadom na žiadanú hodnotu, ak pre jednotlivé prenosy platí:

$$F_r(p) = 10 + 3p \quad \text{a} \quad F_s(p) = \frac{1}{p+2}$$

Pre výsledný prenos uzavretého spätnoväzobného regulačného obvodu vzhľadom na žiadanú hodnotu platí vzťah (19). Pre zadané čiastkové prenosy $F_r(p)$ a $F_s(p)$ potom môžeme napísať

$$F_w(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{\frac{10+3p}{p+2}}{1 + \frac{10+3p}{p+2}} = \frac{\frac{10+3p}{p+2}}{\frac{p+2+10+3p}{p+2}} = \frac{3p+10}{4p+12}$$

Získaný výsledný prenos $F_w(p)$ rozpíšeme na tvar:

$$Y(p) \cdot [4p+12] = W(p) \cdot [3p+10] \Rightarrow 4pY(p) + 12Y(p) = 3pW(p) + 10W(p)$$

Podľa vlastnosti 8 Laplaceovej transformácie potom dostávame diferenciálnu rovnicu uzavretého regulačného obvodu v tvare:

$$4y'(t) + 12y(t) = 3w'(t) + 10w(t)$$

Pre výsledný prenos otvoreného regulačného obvodu (rozpojená spätná väzba) platí vzťah (20). Pre jednotlivé zadané prenosy $F_r(p)$ a $F_s(p)$ potom môžeme napísať

$$F_o(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{10+3p}{p+2}$$

Získaný výsledný prenos $F_o(p)$ rozpíšeme na tvar:

$$Y(p) \cdot [p+2] = W(p) \cdot [10+3p] \Rightarrow pY(p) + 2Y(p) = 3pW(p) + 10W(p)$$

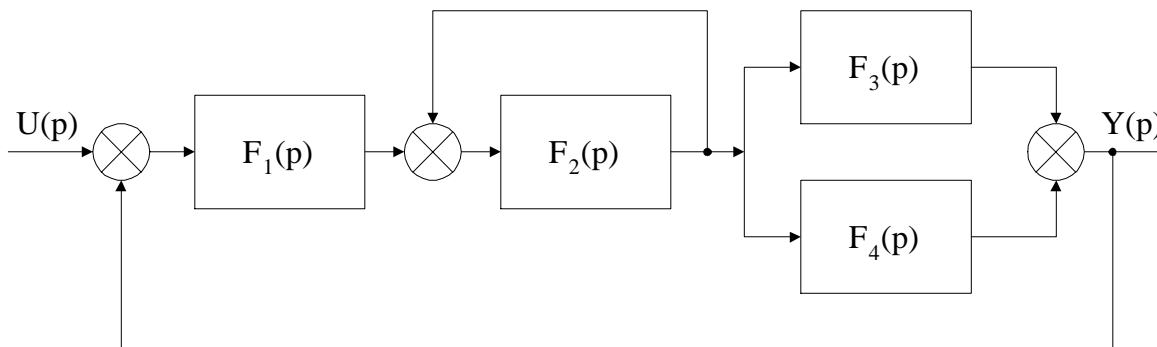
Podľa vlastnosti 8 Laplaceovej transformácie potom dostávame diferenciálnu rovnicu otvoreného regulačného obvodu v tvare:

$$y'(t) + 2y(t) = 3w'(t) + 10w(t)$$

Vyriešením získaných diferenciálnych rovníc pre uzavretý a tiež pre otvorený regulačný obvod dostaneme analytické riešenia, ktoré sú vhodné na vyšetrowanie dynamických vlastností a stanovovanie rôznych charakteristík regulačných obvodov.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Definujte základné zapojenia algebrы prenosov.
2. Stanovte výslednú prenosovú funkciu zloženého systému, ktorý je zobrazený na nasledujúcom obrázku.



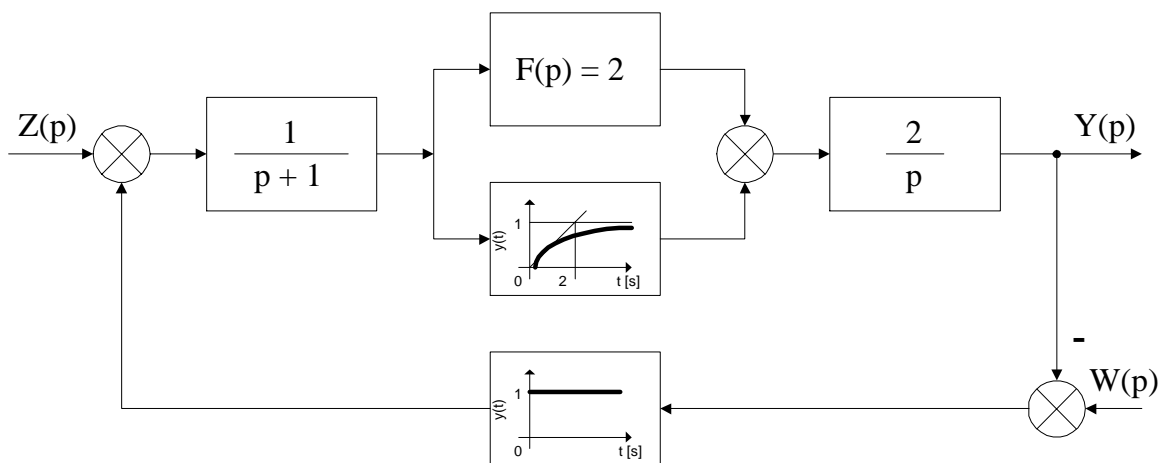
Obr. 18: Zložené zapojenie prenosových blokov.

3. Pre zapojenie prenosových blokov zobrazené na Obr. 18 a pre nasledujúce čiastkové prenosy:

$$F_1(p) = 10p + 20, \quad F_2(p) = 5p, \quad F_3 = \frac{1}{p + 3}, \quad F_4(p) = 2p,$$

napište výslednú diferenciálnu rovnicu zloženého systému.

4. Pre zadaný uzavretý regulačný obvod, ktorý je zobrazený na Obr. 19, určte výsledné prenosové funkcie vzhľadom na poruchu a vzhľadom na žiadanú hodnotu.



Obr. 19: Uzavretý regulačný obvod.

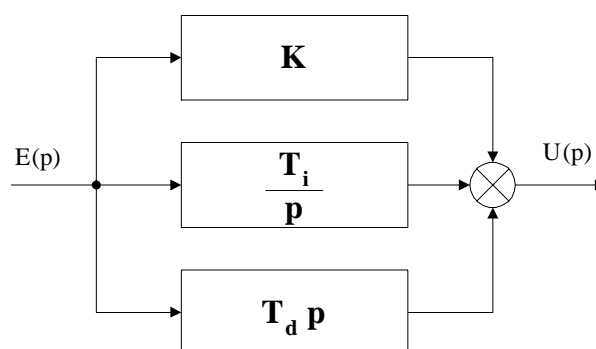
Odvoďte aj výsledné diferenciálne rovnice regulačného obvodu zo získaných prenosových funkcií a tiež ich analyticky vyriešte. Zaznačte polohu koreňov získaného výsledného prenosu do komplexnej roviny.

8 Syntéza spojitého *PID* regulátora

8.1 Definícia spojitého *PID* regulátora

V priemyselných aplikáciách sa stále vo veľkej miere používajú proporcionálno-integračno-derivačné (*PID*) regulátory.

Riadiace algoritmy založené na *PID* regulátoroch patria medzi najpopulárnejšie a najefektívnejšie. Popularita týchto regulátorov spočíva v širokej miere ich uplatnenia a v ich funkčnej jednoduchosti. Vnútorňú štruktúru trojčlenného *PID* regulátora je možné principiálne znázorniť nasledujúcim obrázkom (Obr. 20).



Obr. 20: Štruktúra *PID* regulátora.

Prenosovú funkciu *PID* regulátora je možné vyjadriť v tvare:

$$F_r(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K + \frac{T_i}{p} + T_d p, \quad (21)$$

ktorej v časovej oblasti zodpovedá diferenciálno-integrálna rovnica:

$$u(t) = K e(t) + T_i \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (22)$$

kde K je proporcionálne zosilnenie, T_i je integračná a T_d derivačná časová konštanta.

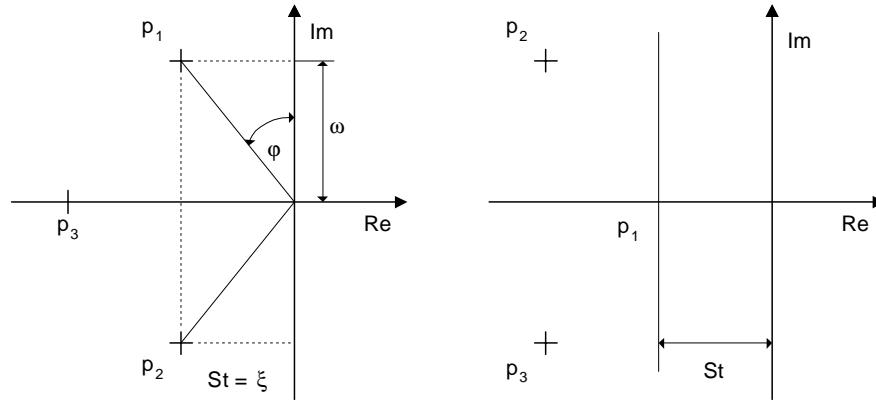
8.2 Metóda dominantných koreňov

Priebeh regulovanej veličiny závisí od rozloženia koreňov charakteristickej rovnice regulačného obvodu v komplexnej rovine. Tento priebeh ovplyvňujú najviac dominantné korene. Sú to korene, ktoré sú najbližšie k imaginárnej osi zľava. Ich vzdialenosť od imaginárnej osi udáva mieru stability S_t .

Pár komplexne združených koreňov znázornených na Obr. 21 môžeme popísať pomocou miery tlmenia T_l , ktorá je definovaná nasledovným vzťahom [17]:

$$p_{1,2} = -\xi \pm i\omega, \quad \text{tg}(\varphi) = \left| \frac{\xi}{\omega} \right| = T_l \quad (23)$$

Hodnoty dominantných koreňov sa stanovujú na základe požiadaviek na kvalitu regulačného obvodu. To znamená, že určíme dominantné korene pre žiadanú mieru stability S_t ,



Obr. 21: Dominantné korene v komplexnej rovine.

resp. mieru tlmenia T_l . Parametre regulátora nastavíme tak, aby ostatné korene boli od dominantných vzdialené čo najviac vľavo.

Príklad 8.1. Navrhnite *PD* a *PID* regulátor na sústavu popísanú diferenciálnou rovnicou druhého rádu (5), ktorej zodpovedá prenosová funkcia (8), pričom parametre diferenciálnej rovnice majú hodnoty:

$$a_2 = 0.7414, \quad a_1 = 0.2313, \quad a_0 = 1 \quad (24)$$

Pre túto sústavu navrhnite regulátor a stanovte jeho parametre tak, aby priebeh regulovanej veličiny pri pôsobení poruchy jednotkového skoku bol kmitavý, tlmený, zodpovedajúci miere stability $S_t = 2.0$ a miere tlmenia $T_l = 0.4$, pričom je povolená 5% trvalá regulačná odchýlka.

1. Návrh *PD* regulátora:

Prenos *PD* regulátora je v tvare

$$F_r(p) = K + T_d p \quad (25)$$

a prenos uzavretého regulačného obvodu $F_w(p)$ je v tvare:

$$F_w(p) = \frac{F_r(p)F_s(p)}{1 + F_r(p)F_s(p)} = \frac{K + T_d p}{a_2 p^2 + (a_1 + T_d)p + (a_0 + K)} \quad (26)$$

Žiadanej miere stability a miere tlmenia odpovedá pár komplexne združených koreňov

$$p_{1,2} = -2 \pm 5i \quad (27)$$

pričom im odpovedajú koreňove súčinitele

$$(p + 2 - 5i)(p + 2 + 5i) = p^2 + 4p + 29$$

Priebeh regulovanej veličiny má byť určený podľa požiadaviek zložkami odpovedajúcich koreňom $p_{1,2}$. Preto musí mať charakteristická rovnica koeficienty, ktoré budú dávať hodnoty koreňov (pólov) $p_{1,2}$. To znamená, že

$$p^2 + \frac{T_d + a_1}{a_2} p + \frac{a_0 + K}{a_2} = p^2 + 4p + 29$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách "p" dostávame sústavu lineárnych rovníc pre stanovenie neznámych parametrov PD regulátora. Pre náš prípad sú parametre regulátora dané

$$\frac{T_d + a_1}{a_2} = 4 \Rightarrow T_d = 4 \cdot 0.7414 - 0.2313 = 2.7343$$

$$\frac{a_0 + K}{a_2} = 29 \Rightarrow K = 29 \cdot 0.7414 - 1 = 20.5006$$

Stanovíme veľkosť trvalej regulačnej odchýlky využitím vety o konečnej hodnote

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + 4p + 29} = \frac{1}{29} < 0.04$$

Zadaný regulovaný systém môžeme regulovať PD regulátorom s parametrami $K = 20.5006$ a $T_d = 2.7343$.

2. Návrh PID regulátora:

Prenos PID regulátora je v tvare :

$$F_r(p) = K + \frac{T_i}{p} + T_d p \quad (28)$$

a prenos uzavretého regulačného obvodu $F_w(p)$ je v tvare:

$$F_w(p) = \frac{F_r(p)F_s(p)}{1 + F_r(p)F_s(p)} = \frac{Kp + T_i + T_d p^2}{a_2 p^3 + (a_1 + T_d)p^2 + (a_0 + K)p + T_i} \quad (29)$$

Podľa požiadaviek na dynamiku musí mať charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu dvojicu dominantných koreňov $p_{1,2}$ a jeden koreň p_3 reálny záporný, ktorého hodnota musí byť oveľa menšia v porovnaní s reálnou časťou koreňov $p_{1,2}$.

Urobíme delenie charakteristickej rovnice koreňovým súčiniteľom $p_{1,2}$. Dostávame

$$\frac{a_2 p^3 + (a_1 + T_d)p^2 + (a_0 + K)p + T_i}{p^2 + 4p + 29} = a_2 p_3 + (T_d + a_1 - 4a_2)$$

a zvyšok po delení

$$[(a_0 + K) - 13a_2 - 4(T_d + a_1)]p + [T_i - 29(T_d + a_1) + 116a_2]$$

Uvedené delenie musí byť bezozvyškové, z čoho dostávame sústavu 3 lineárnych rovníc pre výpočet parametrov PID regulátora

$$T_d = 4a_2 - a_1 - a_2 p_3 \quad (30)$$

$$K = 4(a_1 + T_d) + 13a_2 - a_0 \quad (31)$$

$$T_i = 29(T_d + a_1) - 116a_2 \quad (32)$$

Predpokladajme, že hodnota -10 (tretí koreň) je podstatne menšia v porovnaní s -2 (reálna časť koreňov $p_{1,2}$). Ak zvolíme $p_3 = -10$, po dosadení do (30) pre našu sústavu s parametrami (24) dostávame $T_d = 10.1483$. Do rovníc (31) a (32) dosadíme vypočítané T_d a dostávame parametre $K = 50.1566$ a $T_i = 215$. Pri PID regulátore je trvalá regulačná odchýlka nulová.

8.3 Ziegler-Nicholsova metóda

Podľa tejto metódy sa realizuje nastavenie regulátora v prevádzkovom zapojení. Pri jej použití je potrebné zohľadniť to, že dáva menšie tlmenie prechodového deja a tiež to, že bola vypracovaná na pomerne jednoduchých regulovaných systémoch (pozri napr. [5, 17], atď.). Pri nastavení parametrov postupujeme tak, že regulátor najprv zaradíme do regulačného obvodu a stanovíme kritické parametre K_{kr} - kritické zosilnenie a T_{kr} - kritická perióda. Parametre regulátora potom nastavíme podľa Tab. č. 3.

Tab. č. 3: Hodnoty parametrov regulátora - I.spôsob

-	K	T_i	T_d
P	$0.5K_{kr}$	0	0
PI	$0.5K_{kr}$	$1.2/T_{kr}$	0
PD	$0.5K_{kr}$	0	$0.12T_{kr}$
PID	$0.6K_{kr}$	$2/T_{kr}$	$0.12T_{kr}$

V prípade, že je stanovená prechodová charakteristika regulovaného systému, je možné vypočítať približné hodnoty konštánt regulátora z T_u - doby prietahu, T_n - doby nábehu a $T_p = T_u + T_n$ - doby prechodu podľa Tab. č. 4.

Tab. č. 4: Hodnoty parametrov regulátora - II.spôsob

-	K	T_i	T_d
P	$(T_n/T_u)S$	0	0
PI	$0.9(T_n/T_u)S$	$0.3/T_u$	0
PD	$0.9(T_n/T_u)S$	0	$0.6T_u$
PID	$1.25(T_n/T_u)S$	$0.5/T_u$	$0.5T_u$

S je súčiniteľ autokorelácie systému a je prevrátenou hodnotou zosilnenia systému ($S = 1/K_s$).

Príklad 8.2. Pomocou metódy Ziegler-Nicholsova (II.spôsob) navrhnete PID regulátor na sústavu popísanú diferenciálnou rovnicou druhého rádu

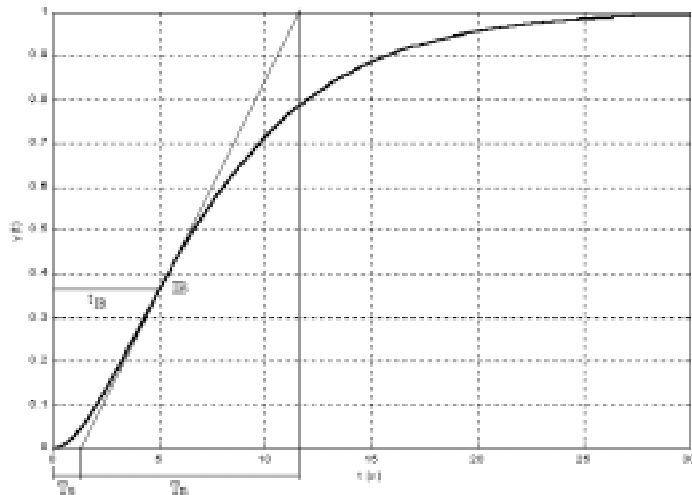
$$15y''(t) + 8y'(t) + y(t) = u(t),$$

ktorej zodpovedá prenosová funkcia

$$F_s(p) = \frac{1}{15p^2 + 8p + 1} = \frac{1}{(3p + 1)(5p + 1)} \quad (33)$$

Prechodová charakteristika tejto dvojkapacitnej sústavy, T_u a T_n sú znázornené na obrázku Obr. 22. Pri vyšetrovaní lokálnych kritérií akosti sme zistili, že uvedená dvojkapacitná sústava má tieto parametre:

$$T_u = 1.3, \quad T_p = 11.6, \quad T_n = 10.3$$



Obr. 22: Prechodová charakteristika sústavy (33).

Uvedené lokálne kritériá akosti je možné odčítať z grafického priebehu prechodovej charakteristiky alebo ich stanoviť výpočtom. Výpočet sa dá urobiť pomocou rovnice dotyčnice v inflexnom bode (IB) prechodovej charakteristiky a následným vypočítaním priesečníkov s osou $t \Rightarrow t_{IB}$ a ustálenou hodnotou $y(\infty) \Rightarrow y(t_{IB})$.

Parametre *PID* regulátora určíme z Tab. č. 4. Vypočítané parametre majú hodnoty:

$$K = 9.9, \quad T_i = 0.38, \quad T_d = 0.65,$$

pričom zosilnenie systému je $S = 1/a_0 = 1/1 = 1$.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Pomocou metódy dominantných koreňov navrhnete *PI*, *PD* a *PID* regulátory na sústavu popísanú diferenciálnou rovnicou

$$0.8y''(t) + 0.5y'(t) + y(t) = u(t),$$

tak aby priebeh regulovanej veličiny bol kmitavý a tlmený s mierou stability $S_t = 2.0$ a mierou tlmenia $T_l = 0.4$.

2. Pomocou metódy Ziegler-Nicholsa navrhnete *PI*, *PD* a *PID* regulátory na sústavu popísanú prenosovou funkciou v tvare

$$F_s(p) = \frac{1}{(3p + 1)(2p + 1)}$$

3. Pomocou programu SIPRO simulujte nastavenie regulátora pomocou metódy Ziegler-Nicholsa (I.spôsob) v prevádzkovom zapojení na sústavu popísanú diferenciálnou rovnicou

$$y'''(t) + 7y''(t) + 23y'(t) + 33y(t) = u(t),$$

ak korene charakteristickej rovnice sú $p_{1,2} = -2 \pm 3i$ a $p_3 = -3$, ($K_{kr} \doteq 128$ a $T_{kr} \doteq 1.8$ [s]).

9 Kritériá akosti dynamických systémov

Na hodnotenie lineárnych dynamických systémov a dynamických procesov, ktoré sa v týchto systémoch vyskytujú, možno použiť rôzne kritériá. Tieto kritériá môžeme rozdeliť do nasledujúcich skupín: *asymptotické*, *globálne* a *lokálne* kritériá akosti.

9.1 Asymptotické kritériá akosti

Asymptotické kritériá posudzujú dynamický proces podľa jeho vlastností pri veľmi veľkých hodnotách času. Základným asymptotickým kritériom je stabilita systému. Stabilita regulačných obvodov je nevyhnutnou, ale nie postačujúcou podmienkou pre ich správnu činnosť. Systém je stabilný, ak prechodová zložka $y_h(t)$ odozvy na výstupe s rastúcim časom konverguje k nule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0,$$

bez ohľadu na charakter vzruchu na vstupe. Bez uvažovania tejto skutočnosti by nebola možná správna činnosť riadiacich systémov, pretože ich ovládanie by sa vymklo akejkoľvek kontrole. Podľa akosti prechodovej zložky dynamického procesu rozlišujeme systémy stabilné, nestabilné a na hranici stability. Stabilitu môžeme posudzovať z priebehu prechodovej, impulzovej alebo frekvenčnej charakteristiky a tiež vyšetrovaním charakteristickej rovnice. Vyšetrovanie stability bude predmetom samostatnej kapitoly 10.

Druhým dôležitým asymptotickým kritériom je statický prenos systému. Zahrňuje prenosovú zložku dynamického procesu pri veľkých hodnotách času. Základom pre vyšetrovanie statického prenosu v oblasti Laplaceových obrazov je veta o konečnej hodnote. Pre budiaci signál v tvare jednotkového skoku platí:

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p), \quad (34)$$

kde $F(p)$ je prenos skúmaného systému.

Príklad 9.1. S využitím vety o konečnej hodnote stanovte statický prenos systému popísaného diferenciálnou rovnicou

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = u(t),$$

pre nulové počiatočné podmienky ak na vstup systému pôsobí jednotkový skok.

S využitím vlastnosti Laplaceovej transformácie (vety o konečnej hodnote) môžeme odvodiť vzťah (34). Pomocou prenosovej funkcie systému potom pre statický prenos dostávame:

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 + 4p + 4} = \frac{1}{4}$$

Túto úlohu je možné vyriešiť aj v časovej oblasti a to analytickým riešením diferenciálnej rovnice a následným použitím vety o konečnej hodnote.

9.2 Globálne kritériá akosti

Globálne kritériá sú vhodným spôsobom odvodené z celého priebehu dynamického procesu. Otvplyvňujú ich vlastnosti systému, ako aj počiatočné podmienky a charakter vstupného signálu. Medzi globálne kritériá akosti patrí monotónnosť, kmitavosť, periodičnosť

a regulačné plochy. Regulačné plochy predstavujú funkcionály dynamických procesov, spravidla definované vhodne zvoleným integrálom zvažujúcim priebeh celého procesu. Najčastejšie sa používa absolútna regulačná plocha a kvadratická regulačná plocha. Obe kvantitatívne charakterizujú prechodový dej u stabilných systémov. Pre nestabilné systémy dávajú regulačné plochy nekonečné hodnoty. Pri regulačných plochách sa vyšetruje rozdiel medzi prechodovou charakteristikou a jej hodnotou v ustálenom stave. Sú definované nasledovne (Obr. 23):

- *absolútna lineárna regulačná plocha:* $S_r = \int_0^T |e(t)| dt = \int_0^T |w(t) - y(t)| dt$,
- *kvadratická regulačná plocha:* $S_{2r} = \int_0^T [e(t)]^2 dt = \int_0^T [w(t) - y(t)]^2 dt$,

kde T , ($T \rightarrow \infty$) je celkový čas vyšetrovania dynamického procesu. Rýchlosť tlmenia prechodového deja zohľadňujú momentové časovo vážené regulačné plochy.

Príklad 9.2. Vypočítajte absolútnu regulačnú plochu, ak prenosová funkcia systému je definovaná ako

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{3p + 1}$$

a ak na vstup systému je privedený jednotkový skok $u(t) = \mu(t) = 1$. Prechodová charakteristika systému je

$$y(t) = \mu(t) - e^{-\frac{1}{3}t} = 1 - e^{-\frac{1}{3}t}$$

Pre absolútnu regulačnú plochu platí

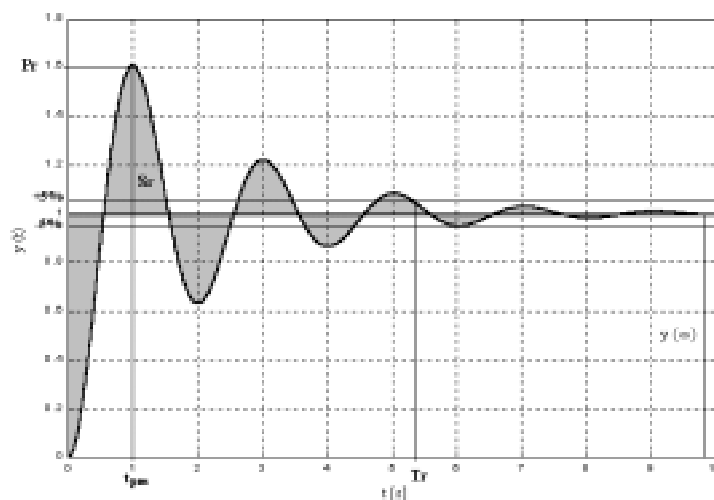
$$\begin{aligned} S_r &= \int_0^\infty |y(\infty) - y(t)| dt = \int_0^\infty |1 - (1 - e^{-\frac{1}{3}t})| dt = \int_0^\infty |e^{-\frac{1}{3}t}| dt = \\ &= [-3e^{-\frac{1}{3}t}]_0^\infty = -3 [e^{-\frac{1}{3}t}]_0^\infty = 3 \end{aligned}$$

9.3 Lokálne kritériá akosti

Podstatou lokálnych kritérií akosti je vyšetrovanie správania sa dynamického procesu (napr. prechodovej charakteristiky) v blízkosti niektorej hodnoty časovej súradnice. Úlohu je možné riešiť v časovej oblasti a na základe obrazového prenosu alebo frekvenčného prenosu. Najčastejšie sa používajú tieto lokálne kritériá akosti (Obr. 23):

- preregulovanie - P_r (max. hodnota prekmitu nad ustálenú hodnotu),
- doba regulácie - T_r (čas, po ktorom už odchýlka od ustáleného stavu neprekročí zvolenú hodnotu),
- čas prvého maxima prechodovej charakteristiky - t_{pm} ,
- doba nábehu - T_n , doba prietahu - T_u , doba prechodu - T_p (sú definované polohou inflexného bodu a smernicou dotyčnice v ňom, vid' Obr. 22).

Lokálne kritériá sú výrazne ovplyvnené charakterom výstupnej veličiny a počiatočnými podmienkami. Na určenie lokálnych kritérií akosti sa vyžaduje, aby prechodová charakteristika systému bola stabilná. Ďalej je potrebné poznať jej ustálenú hodnotu $y(\infty)$.



Obr. 23: Kritériá akosti znázornené na odozve systému.

Preregulovanie určujeme iba u prechodových charakteristík kmitavých alebo s jedným prekmitom. Postup stanovenia môže byť nasledovný. Od času $t = 0$ sa sleduje hodnota prvej derivácie prechodovej charakteristiky. Po zmene znamienka prvej derivácie z plus na mínus, sa zistí čas pri ktorom k tejto zmene došlo. Je to čas prvého maxima t_{pm} . Potom preregulovanie P_r [%] sa vypočíta ako

$$P_r = \frac{y(t_{pm}) - y(\infty)}{y(\infty)} 100 \text{ [%]} \quad (35)$$

Na určenie doby regulácie je potrebné zdefinovať určité pásmo okolo ustálenej hodnoty, v našom prípade sme stanovili 5% pásmo. Potom sa sleduje čas od $t = 0$, po čas kedy prechodová charakteristika vojde do 5% pásma s tým, že z daného pásma už nevyjde. Tento čas je doba regulácie T_r [s].

Príklad 9.3. Stanovte lokálne kritériá akosti systému popísaného diferenciálnou rovnicou

$$0.1y''(t) + 0.1y'(t) + y(t) = u(t)$$

Prechodová charakteristika tohoto systému je zobrazená na Obr. 23. Simuláciou boli získané nasledujúce hodnoty kritérií akosti: $P_r = 1.6$, (60%), $T_r = 5.3$ [s] a $t_{pm} = 1$ [s].

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Analyticky vyšetrite všetky uvedené kritériá akosti dynamického systému popísaného nasledujúcou diferenciálnou rovnicou

$$21y''(t) + 10y'(t) + y(t) = u(t),$$

pri nulových počiatkových podmienkach, ak vstupom je jednotkový skok.

2. Pomocou simulácie v SIPRO stanovte kritériá akosti dynamického systému uvedeného v úlohe 1 a porovnajte ich s analyticky vypočítanými hodnotami.

10 Určovanie stability spojitéch systémov

Stabilita systému je asymptotickým kritériom akosti. Stabilita systému je nevyhnutnou, ale nie postačujúcou podmienkou pre jeho správnu činnosť. Z hľadiska stability rozdeľujeme dynamické systémy na: *stabilné, nestabilné a na hranici stability*.

V ďalších častiach sú uvedené niektoré základné metódy vyšetrovania stability dynamických systémov.

10.1 Stabilita v časovej oblasti

V časovej oblasti určujeme stabilitu z priebehu prechodovej a impulzovej charakteristiky alebo z priebehu fázového portréту v stavovom priestore. Podľa priebehu prechodových charakteristík môžeme z hľadiska ich kmitavosti aj s ohľadom na prekmitnutie cez ustálenú hodnotu urobiť nasledovné rozdelenie: *aperiodické stabilné, aperiodické nestabilné, kmitavé stabilné, kmitavé nestabilné, kmitavé na hranici stability* (pozri napr. [10]).

Prenosy prvých dvoch typov systémov majú len záporné reálne póly, ďalšie dva typy majú prenosy s minimálne jedným párom komplexne združených pólov, pričom o ďalšom roztriedení rozhoduje poloha ostatných pólov a núl prenosovej funkcie, prenos posledného typu má komplexné korene s nulovou reálnou časťou.

Ak uvažujeme $y(t)$ ako riešenie diferenciálnej rovnice, ktorá je matematickým modelom dynamického systému, ktoré môžeme zapísať ako

$$y(t) = y_h(t) + y_n(t),$$

potom v časovej oblasti definujeme stabilitu lineárneho dynamického systému nasledovne: *Systém je stabilný, ak prechodová zložka $y_h(t)$ odozvy na výstupe systému s rastúcim časom konverguje k nule*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0,$$

bez ohľadu na charakter vzruchu na vstupe systému (viď Obr. 13(b)).

Podľa priebehu fázového portréту môžeme stabilitu lineárneho dynamického systému definovať nasledovne:

Systém je stabilný ak priebeh fázovej trajektórie systému začína v počiatočnom stave nenabudeného systému a ustáli sa v novom rovnovážnom stave po privedení vzruchu na vstup systému (viď Obr. 13(a)).

Príklad 10.1. Vyšetrite stabilitu dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou druhého rádu uvedenou v Príklade 6.1.

Na riešenie úlohy je potrebné nájsť analytické riešenie tejto diferenciálnej rovnice. Riešenie je uvedené v Príklade 6.1 a má tvar:

$$y(t) = 1 - e^{-0.1560t} (\cos(1.1508t) + 0.1355 \sin(1.1508t))$$

Podľa definície stability vypočítame limitu prechodovej zložky ako

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-0.1560t} (\cos(1.1508t) + 0.1355 \sin(1.1508t))) = 0$$

Prechodová zložka s rastúcim časom zaniká a prenosová zložka má hodnotu $y_n(t) = 1$. Z priebehu prechodovej charakteristiky zobrazenej na Obr. 11 môžeme povedať, že ide o kmitavú tlmenú (stabilnú) prechodovú charakteristiku.

10.2 Algebraické metódy vyšetřovania stability

Algebraické metódy vyšetřovania stability sú vhodné pre posudzovanie stability systémov vyšších rádo. Tieto metódy vychádzajú z charakteristickej rovnice prenosu matematického modelu systému. Charakteristickú rovnicu môžeme vo všeobecnosti zapísať ako

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (36)$$

Pre definíciu stability dynamického systému potom platí:

Systém je stabilný, ak korene charakteristickej rovnice (36) systému (póly) ležia v ľavej časti komplexnej roviny, t.j. sú záporné, resp. majú záporné reálne časti ak sú komplexne združené (viď Obr. 21). Vzdialenosť od imaginárnej osi je miera stability.

Príklad 10.2. Algebraickými metódami vyšetřite stabilitu dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou druhého rádu uvedenou v Príklade 6.1.

Danej diferenciálnej rovnici zodpovedá prenosová funkcia v tvare:

$$F(p) = \frac{1}{0.7414p^2 + 0.2313p + 1}$$

Riešením charakteristickej rovnice je dvojica komplexne združených koreňov: $p_{1,2} = -1.55598 \pm 1.15085i$. Pre reálne časti koreňov platí: $Re(p_{1,2}) < 0 \Rightarrow$ systém je stabilný.

Pre systémy popísané diferenciálnymi rovnicami nižších rádo ($n \leq 3$) je možné vypočítat korene charakteristickej rovnice priamo a tak posúdiť stabilitu systému.

Pre systémy popísané diferenciálnymi rovnicami vyšších rádo je výhodné použiť napr. Hurwitzove kritéria stability. Podmienky Hurwitzovho kritéria sú (pozri napr. [4, 17]):

- všetky koeficienty charakteristickej rovnice musia mať rovnaké znamienka,
- všetky subdeterminanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ zostavené z koeficientov charakteristickej rovnice musia byť kladné. Hurwitzov determinant Δ_n má tvar:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots \end{vmatrix}$$

Príklad 10.3. Hurwitzovou metódou posúďte stabilitu systému, ktorý je popísaný prenosovou funkciou v tvare:

$$F(p) = \frac{1}{p^3 + 9p^2 + 26p + 24}$$

Charakteristická rovnica systému má tvar: $p^3 + 9p^2 + 26p + 24 = 0$. Zostavíme Hurwitzov determinant, ktorý bude

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 26 & 9 & 1 \\ 0 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

Prvá podmienka Hurwitzovho kritéria je splnená, pretože $\{1, 9, 26, 24\} > 0$. Pre hodnoty jednotlivých subdeterminantov potom dostávame: $\Delta_3 = 210$, $\Delta_2 = 9$ a $\Delta_1 = 1 \Rightarrow$ systém je stabilný.

10.3 Frekvenčné metódy vyšetovania stability

Ak máme regulovaný systém definovaný prenosovou funkciou $F_s(p)$ a regulátor definovaný prenosovou funkciou $F_r(p)$, potom pre obrazový prenos otvoreného regulačného obvodu platí vzťah (20).

Zostrojovalie frekvenčných charakteristík bolo popísané v kapitole 6. Pri zostrojovaní frekvenčných charakteristík sa transformuje rovina koreňov "p" do komplexnej roviny $F_o(i\omega)$, pričom transformácia sa realizujeme podľa obrazového prenosu otvoreného obvodu. Pri transformácii sa všetky korene charakteristickej rovnice zobrazia z roviny "p" do bodu $(-1; i0)$ v rovine $F_o(i\omega)$. Tento bod sa nazýva kritický bod. Transformácia sa prevedie tak, že za "p" vo vzťahu (20) sa dosadí komplexné číslo "i\omega".

Potom na zistenie stability regulačného obvodu je potrebné vyšetriť priebeh krivky $F_o(i\omega)$ pre $\omega \in \langle 0; \infty \rangle$ v Gaussovej komplexnej rovine vzhľadom ku kritickému bodu $(-1; i0)$. Pre definíciu stability potom platí (napr. [4, 10, 17]):

Systém je stabilný, ak frekvenčná charakteristika prechádza vpravo od kritického bodu, ak po nej postupujeme v smere rastúcich hodnôt ω . Ak frekvenčná charakteristika prechádza vľavo od kritického bodu, obvod je nestabilný. Prechod frekvenčnej charakteristiky kritickým bodom znamená, že obvod je na hranici stability.

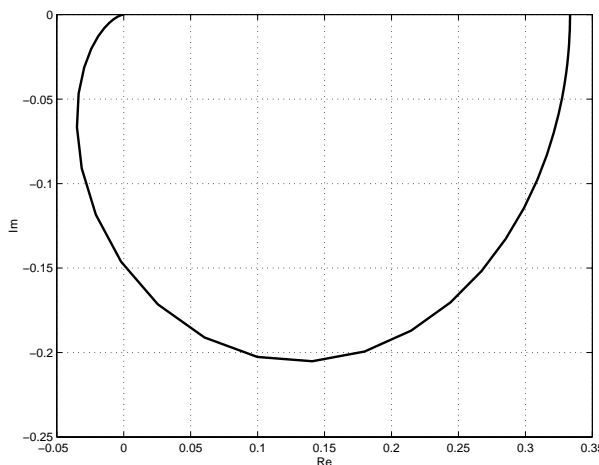
Príklad 10.4. Frekvenčnou metódou vyšetrite stabilitu dynamického systému popísaného diferenciálnou rovnicou uvedenou v Príklade 6.4.

Nyquistova frekvenčná charakteristika uvedeného systému je zobrazená na Obr. 12(a). Z priebehu frekvenčnej charakteristiky vidieť, že systém je stabilný, pretože v smere nárastu frekvencie prechádza frekvenčná charakteristika vpravo od kritického bodu.

Príklad 10.5. Frekvenčnou metódou vyšetrite stabilitu dynamického systému popísaného nasledujúcou prenosovou funkciou:

$$F_o(p) = \frac{8}{(p+3)(p+8)}$$

Podľa už popísaného postupu zostrojíme frekvenčnú charakteristiku daného systému z prenosu otvoreného obvodu.



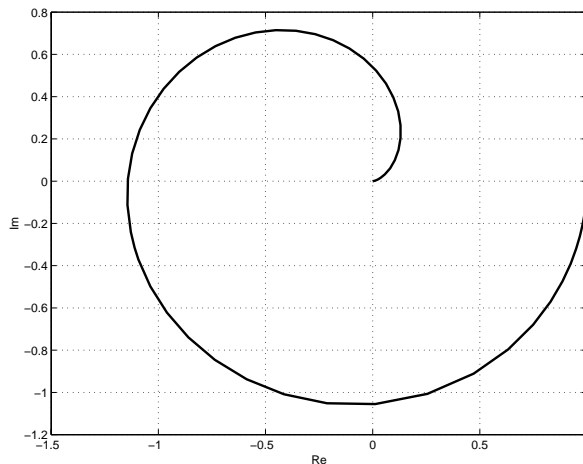
Obr. 24: Nyquistova frekvenčná charakteristika.

Z priebehu frekvenčnej charakteristiky, ktorý je zobrazený na Obr. 24 je zrejmé, že systém je stabilný, pretože v smere nárastu frekvencie prechádza frekvenčná charakteristika vpravo od kritického bodu.

Príklad 10.6. Frekvenčnou metódou vyšetrite stabilitu regulačného obvodu, pričom prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu má tvar:

$$F_o(p) = \frac{1 - 2p}{(1 + 2p)(1 + p + p^2)}$$

Frekvenčná charakteristika otvoreného regulačného obvodu je zobrazená na Obr. 25.



Obr. 25: Nyquistova frekvenčná charakteristika.

Z priebehu frekvenčnej charakteristiky, ktorý je zobrazený na Obr. 25 je vidieť, že systém je nestabilný, pretože v smere nárastu frekvencie prechádza frekvenčná charakteristika vľavo od kritického bodu.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. V časovej a vo frekvenčnej oblasti posúďte stabilitu systému, ktorý je popísaný diferenciálnou rovnicou:

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = u(t)$$

pre nulové počiatkové podmienky ak $u(t) = \mu(t)$.

2. Pomocou algebraických metód vyšetrite stabilitu systému, ktorého prenosová funkcia má tvar:

$$F(p) = \frac{1}{p^3 + 3.2p^2 + 4.61p + 12.03}$$

3. Pomocou algebraických metód vyšetrite stabilitu systému, ktorého prenosová funkcia má tvar:

$$F(p) = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + p - 26}$$

4. Zostrojte frekvenčné charakteristiky a vyšetrite stabilitu systému pre úlohy na samostatné cvičenie uvedené v kapitole 6.

11 Diskrétne systémy

11.1 Z-transformácia

Z-transformácia je pravidlo, pomocou ktorého sa postupnosť čísel konvertuje na funkciu komplexnej premennej z , ($z = e^{pT}$). Pre diskrétny čas k je definovaná vzťahom:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}, \quad (37)$$

kde T je perióda vzorkovania. Inverznú Z-transformáciu počítame podobne ako LT, a to rozkladom na parciálne zlomky alebo pomocou transformačného slovníka.

Príklad 11.1. Vypočítajte Z-transformáciu jednotkového skoku $\mu(t)$.

$$Z\{\mu(t), z\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Z-transformácie niektorých ďalších základných funkcií sú uvedené v Prílohe 2.

Medzi základnú vlastnosť, ktorú budeme ďalej využívať patrí veta o oneskorení. Pre diskrétnu postupnosť $f(k - m)$ môžeme napísať:

$$f(k - m) \div z^{-m}F(z) \quad (38)$$

Ďalšie dôležité vlastnosti Z-transformácie sú uvedené napríklad v [4, 9, 17].

11.2 Diferenčné rovnice a diskrétne prenosy systémov

Existuje viacero rovnicových vyjadrení lineárnych diskrétnych systémov. Závisí to od cieľa, na ktorý má byť vyjadrenie použité.

Lineárny systém môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu minulých výstupov, súčasného a minulých vstupov. Potom pre výstup systému n -tého rádu platí:

$$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k - 1) + \dots + b_mu(k - m) - a_1y(k - 1) - \dots - a_ny(k - n), \quad (39)$$

kde b_0, b_1, \dots, b_m a a_1, a_2, \dots, a_n sú konštanty.

Priamou Z-transformáciou diferenčnej rovnice (39) a uplatnením vety o oneskorení (38), môžeme získať vyjadrenie v tvare diskrétnej prenosovej funkcie:

$$F(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (40)$$

Pri tomto vyjadrení sa predpokladajú nulové počiatkové podmienky. Pre prenosy diskrétnych systémov platia rovnaké pravidlá algebry prenosov ako pre spojité systémy.

11.3 Diskretizácia spojitých systémov

Postup na získanie diferenčnej rovnice z diferenčnej rovnice (diskretizácia) môžeme zhrnúť do niekoľkých nasledujúcich bodov:

- diferenciály v diferenciálnej rovnici nahradíme diferenčným vyjadrením,
- stanovíme diskretnú prenosovú funkciu systému,
- inverznou Z-transformáciou určíme diferenčnú rovnicu systému.

Na diskretizáciu spojitých systémov budeme využívať numerický derivátor v Tustinovom tvare $H_m^T(z^{-1})$ alebo metódu prvej diferencie $H_m^1(z^{-1})$:

$$H_m^T(z^{-1}) = \left[\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]^m, \quad H_m^1(z^{-1}) = \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} \right]^m \quad (41)$$

Popísaný postup je ilustrovaný na nasledujúcom príklade.

Príklad 11.2. Diskretizujte spojitý dynamický systém, ktorý je popísaný diferenciálnou rovnicou

$$0.7414y''(t) + 0.2313y'(t) + y(t) = u(t),$$

diskretizáciu urobte pomocou Tustinovho operátora $H_m^T(z^{-1})$.

Pre časy vzorkovania $t = kT$ prepíšeme uvedenú diferenciálnu rovnicu na tvar:

$$0.7414y''(kT) + 0.2313y'(kT) + y(kT) = u(kT)$$

Použitím Tustinovho operátora a Z-transformácie dostávame

$$0.7414 \left[\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]^2 Y(z) + 0.2313 \left[\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right] Y(z) + Y(z) = U(z)$$

Úpravou dostávame

$$\left(\frac{2.9656}{T^2} \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \right) Y(z) + \left(\frac{0.4626}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) Y(z) + Y(z) = U(z)$$

Ďalšou úpravou potom dostávame tvar

$$\begin{aligned} [(T^2 + 0.4626T + 2.9656) + (2T^2 - 5.9312)z^{-1} + (T^2 - 0.4626T + 2.9656)z^{-2}] Y(z) = \\ = [T^2 + 2T^2z^{-1} + T^2z^{-2}] U(z) \end{aligned}$$

Vyjadrením Z-transformácie výstupu dostaneme

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} U(z),$$

kde pre koeficienty prenosu pre náš prípad platí:

$$b_0 = \frac{T^2}{T^2 + 0.4626T + 2.9656}, \quad b_1 = \frac{2T^2}{T^2 + 0.4626T + 2.9656}, \quad b_2 = \frac{T^2}{T^2 + 0.4626T + 2.9656},$$

$$a_1 = \frac{2T^2 - 5.9312}{T^2 + 0.4626T + 2.9656}, \quad a_2 = \frac{T^2 - 0.4626T + 2.9656}{T^2 + 0.4626T + 2.9656} \quad (42)$$

Diferenčná rovnica má potom výsledný tvar

$$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2),$$

pričom pre koeficienty diferenčnej rovnice platia vzťahy (42).

11.4 Diskrétne PSD regulátory

PSD regulátory sú diskrétnym ekvivalentom ku PID regulátorom. Diskrétna prenosová funkcia regulátora má tvar:

$$F_r(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (43)$$

Parametre q_0, q_1, q_2 sa dajú prepočítať z parametrov PID regulátora (22), pre periódu vzorkovania T podľa zvolenej metódy integrovania. Pre lichobežníkovú metódu integrovania sa prepočet dá urobiť podľa nasledujúcich vzťahov:

$$q_0 = K + \frac{T_i \cdot T}{2} + \frac{T_d}{T}, \quad q_1 = -K + \frac{T_i \cdot T}{2} - \frac{2T_d}{T}, \quad q_2 = \frac{T_d}{T}$$

Pri diskrétnom riadení je veľmi dôležitou úlohou voľba periódy vzorkovania. Niektoré doporučenia na jej voľbu sú uvedené napríklad v [9, 17].

11.5 Kritériá stability diskrétnych systémov

Stabilitu diskrétneho systému môžeme posúdiť vyšetrovaním charakteristickej rovnice. Z diskrétnej prenosovej funkcie (40) vyplýva, že charakteristická rovnica má tvar:

$$1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = 0 \quad (44)$$

Charakteristickú rovnicu (44) upravíme na tvar:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (45)$$

Po vypočítaní koreňov (pólov) z_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) z charakteristickej rovnice (45) posúdime stabilitu nasledovne:

$$|z_i| < 1 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n. \quad (46)$$

V prípade ak je charakteristická rovnica vyššieho rádu, tak môžeme na posúdenie stability využiť algebraické kritériá stability, napr. Hurwitzove kritériá.

Príklad 11.3. Posúďte stabilitu diskrétneho systému, ak charakteristická rovnica má nasledujúci tvar:

$$(z - 0.2)[z - (0.5 - 0.2i)][z - (0.5 + 0.2i)] = 0$$

Uvedená charakteristická rovnica má tieto korene:

$$z_1 = 0.2, \quad z_{2,3} = 0.5 \pm 0.2i$$

Podľa kritéria stability (46) je zrejmé, že $|z_1| = 0.2$, $|z_{2,3}| = \sqrt{(0.5)^2 + (0.2)^2} = 0.538$. Moduly koreňov charakteristickej rovnice spĺňajú podmienku (46) \Rightarrow systém je stabilný.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Posúďte stabilitu diskrétneho systému z Príkladu 11.2., pre periódu vzorkovania $T = 1$ [s] a $T = 5$ [s].
2. Diskretizujte výslednú diferenciálnu rovnicu uzavretého regulačného obvodu, pričom riadená sústava a navrhnutý PD aj PID regulátor sú uvedené v kapitole 8 v úlohe na cvičenie č. 1 a posúďte stabilitu pre periódu vzorkovania $T = 1$ [s].

12 Nelineárne spojité systémy

12.1 Definícia nelineárnych systémov

V kapitolách 1 až 10 sme sa obmedzili na vyšetovanie vlastností dynamických systémov so sústredenými parametrami, ktoré boli popísané lineárnymi diferenciálnymi rovnicami s konštantnými koeficientmi.

Nelineárne sústavy sú také, pri ktorých neplatí princíp superpozície [10]. Metódy z oblasti lineárnych systémov sú nepoužiteľné pre nelineárne systémy, resp. platia len ako približné metódy v niektorých špecifických prípadoch. Väčšina dynamických systémov je nelineárna. Lineárne systémy sú iba idealizáciou pre úzky okruh reálnych systémov v obmedzenom rozsahu ich prevádzkových stavov.

12.2 Matematický popis nelineárnych systémov

Nelineárne systémy sa dajú popísať diferenciálnou rovnicou vo všeobecnom tvare [10, 18]:

$$\frac{d^n v(t)}{dt^n} = f[v(t), v'(t), \dots, v^{(n-1)}(t), u(t), t] \quad (47)$$

Diferenciálnu rovnicu (47) môžeme rozložiť na n diferenciálnych rovníc 1. rádu v kanonickom tvare

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = g_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n;$$

kde $x_i(t)$ sú stavové premenné a g_i sú nelineárne funkcie.

Tento rozklad na kanonický tvar je základom metód stavového priestoru a používa sa na posudzovanie stability rovnovážnych stavov nelineárnych systémov a to algebraickými metódami alebo posudzovaním priebehov fázových portrétov.

12.3 Linearizácia

Pri vyšetovaní nelineárnych systémov sa často postupuje cestou linearizácie, čím sa úloha prevádza na riešenie lineárnych systémov. Presnosť dosiahnutých výsledkov závisí od splnenia podmienok linearizácie. Metóda linearizácie nie je vhodná pre systémy s typickými nelinearitami.

Majme nelineárny systém opísaný vzťahom

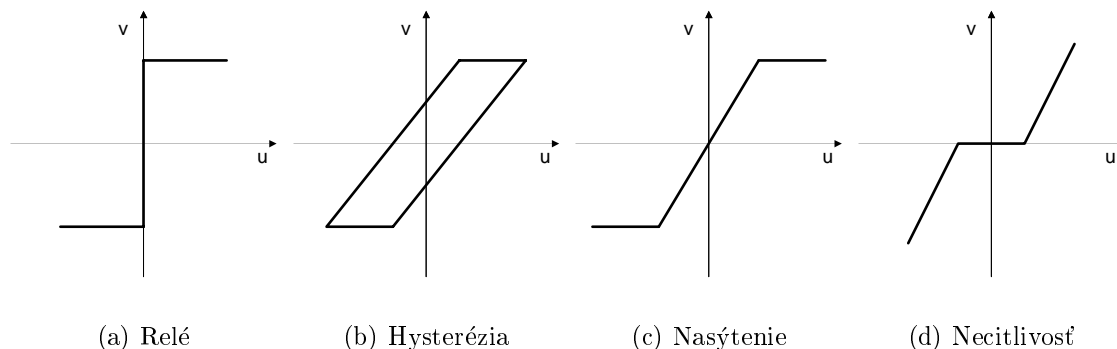
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (48)$$

kde y je výstup zo systému (alebo jeho n -tá derivácia), x_i sú vstupné alebo výstupné premenné (alebo ich $(n-1)$ -vá derivácia) a f je nelineárna funkcia.

Ak je funkcia (48) analytická a v okolí pracovného bodu je spojitá a diferencovateľná, je možné rozvinúť ju do Taylorovho radu v okolí pracovného bodu. Ak uvažujeme iba prvé dva členy radu, dostávame lineárnu diferenciálnu rovnicu ako náhradu nelineárnej rovnice, ktorá platí v okolí pracovného bodu.

12.4 Základné nelinearity

Systémy obsahujúce typické nelinearity nie je možné vyšetrovať metódou linearizácie a metóda stavového priestoru musí byť pre ne modifikovaná. Medzi typické nelinearity patria napríklad: *relé*, *hysterézia*, *nasýtenie*, *pásmo necitlivosti* a iné.



Obr. 26: Statické charakteristiky typických nelinearit.

Ďalej je možné nelinearity rozdeliť na nelinearity parazitné a na nelinearity úmyselne zavedené [10]. Parazitné nelinearity existujú takmer v každom reálnom systéme (napr. trenie, pásmo necitlivosti zosilňovačov, zubová vôľa v prevodoch, atď.). Úmyselne zavedené nelinearity môžu byť napr. oscilátory, usmerňovače, dvojpohová regulácia a pod.

12.5 Stabilita nelineárnych systémov

Nelineárne systémy môžu mať niekoľko rovnovážnych stavov. Najčastejšie skúmame stabilitu systému v okolí rovnovážneho stavu. Rovnovážnym stavom je každý bod v stavovom priestore, v ktorom sa stav systému bez zmeny vonkajšieho pôsobenia nemení. Pre rovnovážny stav platí: $\frac{dx}{dt} = 0$. Ak posudzujeme stabilitu pre počiatočné stavy na určitej oblasti, ktorá obklopuje rovnovážny stav, hovoríme o lokálnej stabilite. Pre nelineárne systémy skúmame stabilitu v malom a stabilitu vo veľkom.

Na skúmanie stability v malom je potrebné poznať matematický model nelineárneho systému, ktorý je zapísaný v kanonickom tvare. Tento model linearizujeme pre okolie rovnovážneho stavu a potom posudzujeme stabilitu ako pre lineárny systém.

Majme model nelineárneho systému, ktorý je zapísaný v kanonickom tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{49}$$

kde f_1, f_2, \dots, f_n sú nelineárne funkcie.

Označme tiež vektor stavových veličín ako $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Rovnovážne stavy sú potom dané singulárnymi bodmi systému, ktoré získame riešením rovníc

$$0 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\begin{aligned}
0 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\
&\vdots \\
0 &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),
\end{aligned} \tag{50}$$

a riešenie označíme $x_e^i = [x_{1e}^i, x_{2e}^i, \dots, x_{ne}^i]^T$. Ak funkcie f_1, f_2, \dots, f_n rozvinieme do Taylorovho radu v okolí každého singularného bodu a obmedzíme sa iba na členy s prvými deriváciami (linearizácia), potom dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x_1 - x_{1e}^i) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 - x_{1e}^i) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_n - x_{ne}^i), \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}(x_1 - x_{ne}^i) &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1 - x_{1e}^i) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_n - x_{ne}^i),
\end{aligned} \tag{51}$$

alebo v skrátrenom maticovom tvare

$$\frac{d}{dt}(x - x_e^i) = J(x_e^i)[x - x_e^i], \tag{52}$$

kde $J(x_e^i)$ je Jacobiho matica. Stabilita systému sa určí z charakteristickej rovnice

$$pI - J(x_e^i) = 0, \tag{53}$$

kde I je jednotková matica rozmeru $[n, n]$ a p je Laplaceov operátor.

Príklad 12.1. Posúďte stabilitu v malom systéme popísaného diferenciálnymi rovnicami v kanonickom tvare:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_1x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_1x_2
\end{aligned}$$

Na posúdenie stability potrebujeme nájsť rovnovážne stavy zo sústavy rovníc

$$\begin{aligned}
0 &= -2x_1 + x_1x_2 \\
0 &= -x_2 + x_1x_2
\end{aligned}$$

Vyriešením sústavy rovníc získame dva rovnovážne stavy $x_e^1 = [0, 0]^T$ a $x_e^2 = [1, 2]^T$. Ďalej zostavíme Jacobiho maticu podľa vzťahu:

$$J(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Jacobiho matica zostavená pre náš prípad má potom tvar:

$$J(x) = \begin{vmatrix} -2 + x_2 & x_1 \\ x_2 & -1 + x_1 \end{vmatrix}$$

Pre prvý rovnovážný stav x_e^1 a získanú Jacobiho maticu môžeme charakteristickú rovnicu (53) rozpísať na tvar:

$$pI - J(x_e^1) = p \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+2 & 0 \\ 0 & p+1 \end{vmatrix} = (p+2)(p+1) \Rightarrow p_1 = -2, p_2 = -1$$

Korene charakteristickej rovnice sú záporné, $p_{1,2} < 0$, \Rightarrow systém je v rovnovážnom stave x_e^1 stabilný.

Pre druhý rovnovážný stav x_e^2 a získanú Jacobiho maticu môžeme charakteristickú rovnicu (53) rozpísať na tvar:

$$pI - J(x_e^2) = p \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -2 & p \end{vmatrix} = p^2 - 2 \Rightarrow p_1 = -\sqrt{2}, p_2 = +\sqrt{2}$$

Jeden koreň charakteristickej rovnice je kladný, $p_1 < 0, p_2 > 0 \Rightarrow$ systém je v rovnovážnom stave x_e^2 nestabilný.

Na skúmanie stability vo veľkom (Ljapunova metóda) je tiež potrebné poznať matematický model nelineárneho systému. Stabilný systém musí spĺňať nasledujúce podmienky:

1. Musí existovať funkcia $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a tiež derivácie $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$;
2. Funkcia je pozitívne definitná v oblasti Ω , t.j. $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$;
3. Derivácia funkcie podľa času je negatívne definitná v oblasti Ω , t.j. $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

Príklad 12.2. Posúďte stabilitu vo veľkom systému popísaného diferenciálnymi rovnicami v kanonickom tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2 \end{aligned}$$

Na posúdenie stability potrebujeme nájsť rovnovážne stavy zo sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= -x_1 + x_2 \\ 0 &= -x_1^3 - x_2 \end{aligned}$$

Vyriešením sústavy získame jeden rovnovážný stav $x_e^1 = [0, 0]^T$.

Na posúdenie stability zvolíme funkciu $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, ktorá spĺňa prvé dve podmienky. Ďalej je potrebné zistiť, či je splnená aj tretia podmienka.

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1 \cdot (-x_1 + x_2) + 2x_2 \cdot (-x_1^3 - x_2) = -2 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 (x_1^2 - 1))$$

Z uvedeného vyplýva, že je splnená aj tretia podmienka \Rightarrow systém je stabilný vo veľkom.

Úlohy na samostatné cvičenie:

1. Uveďte príklady nelineárnych systémov a napíšte ich matematické modely.
2. Posúďte stabilitu (v malom aj vo veľkom) systému popísaného diferenciálnymi rovnicami v kanonickom tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

13 Spojité systémy neceločíselného rádu

13.1 Úvod

Derivácia a integrál neceločíselného rádu nie sú novým matematickým nástrojom. Prvá písomná zmienka sa datuje do roku 1695, kde v liste medzi Leibnizom a L'Hospitalom bola spomenutá derivácia polovičného rádu. Tento matematický aparát bol doménou matematikov a využíval sa hlavne pri modelovaní fyzikálnych systémov. S využitím týchto nástrojov v automatickom riadení sa začalo iba v posledných rokoch (napr. [3, 13, 14]).

Reálne systémy majú nekonečnú pamäť, to znamená, že aktuálny stav systému závisí od všetkých jeho minulých stavov. Práve tento fakt je zahrnutý v modeloch, ktoré využívajú deriváciu neceločíselného rádu. Modely celočíselného rádu uvažujú iba s obmedzenou pamäťou (oneskorenie 1, 2, 3, ... rádu).

Pri praktických výpočtoch však môžeme naraziť na problém s veľkou pamäťou. Na tento účel je vhodné využívať numerické metódy výpočtu derivácií a integrálov neceločíselného rádu, kde je využívaný princíp "krátkej pamäte". Tento princíp využíva na výpočet aktuálnej hodnoty iba niekoľko hodnôt z histórie. Ostatné hodnoty majú vplyvom váhových koeficientov malý vplyv na novú hodnotu a sú z výpočtu vynechané.

13.2 Derivácia a integrál neceločíselného rádu

Deriváciu a integrál neceločíselného rádu môžeme vyjadriť pomocou spoločného operátora ${}_a D_t^\alpha$, kde a a t sú hranice operácie. Na vyjadrenie sa vo všeobecnosti používajú dve definície [14]. Riemann - Liouvilleova definícia má tvar:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (54)$$

pre $(n - 1 < \alpha < n)$ a kde $\Gamma(\cdot)$ je Eulerova *Gamma* funkcia.

Grünwald - Letnikova definícia derivácie neceločíselného rádu má nasledujúci tvar:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (55)$$

kde $\lfloor x \rfloor$ znamená celú časť x .

Numerickú aproximáciu operátora neceločíselného rádu α môžeme vyjadriť z Grünwald - Letnikovej definície (55) v tvare:

$$({}_{k-L/h} D_{kt}^{\pm\alpha} f(t) \approx h^{\mp\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\pm\alpha}{j} f_{k-j}, \quad (56)$$

kde L je dĺžka "krátkej pamäte", h je časový krok výpočtu (perióda vzorkovania) a $(-1)^j \binom{\pm\alpha}{j}$ sú binomické koeficienty $c_j^{(\pm\alpha)}$, ($j = 0, 1, \dots$). Pre ich výpočet je vhodné použiť nasledujúci vzťah [3]:

$$c_0^{(\pm\alpha)} = 1, \quad c_j^{(\pm\alpha)} = \left(1 - \frac{1 + (\pm\alpha)}{j}\right) c_{j-1}^{(\pm\alpha)} \quad (57)$$

Na zefektívnenie výpočtov budeme využívať vyššie spomínaný princíp krátkej pamäte.

Laplaceova transformácia derivácie/integrálu neceločíselného rádu má tvar [14]:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} {}_0D_t^{\alpha} f(t) dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0}, \text{ pre } (n-1 < \alpha \leq n). \quad (58)$$

13.3 Sústavy neceločíselného rádu

Regulované sústavy neceločíselného rádu budú reprezentované diferenciálnou rovnicou vo všeobecnom tvare:

$$a_n D_t^{\beta_n} y(t) + \dots + a_1 D_t^{\beta_1} y(t) + a_0 D_t^{\beta_0} y(t) = b_n D_t^{\alpha_n} u(t) + \dots + b_1 D_t^{\alpha_1} u(t) + b_0 D_t^{\alpha_0} u(t), \quad (59)$$

kde β_k, α_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) sú vo všeobecnosti reálne čísla, $\beta_n > \dots > \beta_1 > \beta_0$, $\alpha_m > \dots > \alpha_1 > \alpha_0$ a a_k, b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) sú ľubovoľné konštanty. Diferenciálnej rovnici (59) zodpovedá prenosová funkcia

$$F_s(s) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^{\alpha_m} + \dots + b_1 p^{\alpha_1} + b_0 p^{\alpha_0}}{a_n p^{\beta_n} + \dots + a_1 p^{\beta_1} + a_0 p^{\beta_0}} \quad (60)$$

13.4 Regulátory neceločíselného rádu

Regulátor neceločíselného rádu bude reprezentovaný diferenciálnou rovnicou neceločíselného rádu v tvare [14]:

$$u(t) = K e(t) + T_i D_t^{-\lambda} e(t) + T_d D_t^{\delta} e(t), \quad (61)$$

ktorej zodpovedá prenosová funkcia vo všeobecnom tvare:

$$F_r(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K + \frac{T_i}{p^{\lambda}} + T_d p^{\delta}, \quad (62)$$

kde λ a δ sú ľubovoľné reálne čísla ($\lambda, \delta \geq 0$), K je proporcionálna konštanta, T_i je integračná konštanta, T_d je derivačná konštanta, λ je rád integrovania a δ je rád derivovania.

Ak uvažujeme $\lambda = 1$ a $\delta = 1$, tak dostaneme klasický *PID* regulátor. Ak $\lambda = 0$ a/alebo $T_i = 0$, dostaneme *PD* ^{δ} regulátor a pod. Všetky uvedené typy regulátorov sú len partikulárnymi prípadmi *PI* ^{λ} *D* ^{δ} regulátora neceločíselného rádu, ktorým je viac flexibilný a dáva lepšie výsledky pri riadení reálnych systémov [13].

13.5 Modelovanie a simulácia regulačných obvodov

Výslednú diferenciálnu rovnicu neceločíselného rádu uzavretého regulačného obvodu môžeme odvodiť podľa pravidiel algebry prenosov a postupu, ktorý je uvedený v kapitole 7 pre lineárne spojitý systém celočíselného rádu. Tento postup je demonštrovaný na sústave popísanej dvojčlennou diferenciálnou rovnicou a *PD* ^{δ} regulátore neceločíselného rádu a je uvedený v nasledujúcom príklade.

Príklad 13.1. Odvodte výsledný vzťah pre simuláciu regulačného obvodu (impulzová a prechodová charakteristika) neceločíselného rádu ak dvojčlenná diferenciálna rovnica regulovanej sústavy (žiarič-pyrometer) má parametre:

$$a_1 = 39.69, a_0 = 0.598, \beta_1 = 1.26, \beta_0 = 0, b_0 = 1.0, \alpha_0 = 0 \quad (63)$$

a PD^δ regulátor navrhnutý na žiadanú mieru stability $S_t = 2.0$ má koeficienty:

$$K = 64.47, T_d = 48.99, \delta = 0.5 \quad (64)$$

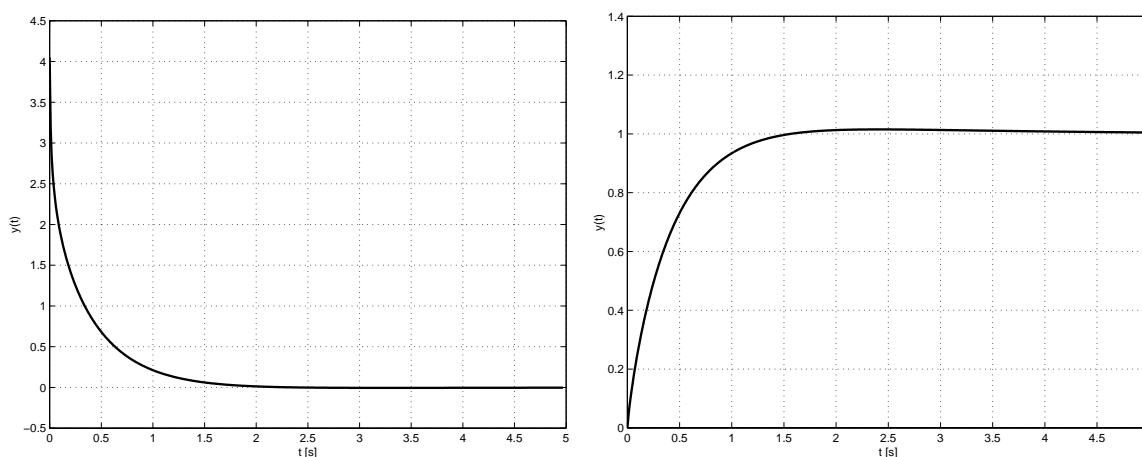
Diferenciálnu rovnicu uzavretého regulačného obvodu odvodíme pomocou algebry prenosov a Laplaceovej transformácie (58). Pre náš prípad dostávame nasledujúcu diferenciálnu rovnicu neceločíselného rádu pre uzavretý regulačný obvod

$$a_1 {}_0D_t^{\beta_1} y(t) + T_d {}_0D_t^\delta y(t) + (a_0 + K)y(t) = K w(t) + T_d {}_0D_t^\delta w(t) \quad (65)$$

Diferenciálnu rovnicu (65) s využitím vzťahu (56) prepíšeme na diferenčnú rovnicu:

$$y_k = \frac{K w_k + T_d h^{-\delta} \sum_{j=0}^k c_j^{(\delta)} w_{k-j} - a_1 h^{-\beta_1} \sum_{j=1}^k c_j^{(\beta_1)} y_{k-j} - T_d h^{-\delta} \sum_{j=1}^k c_j^{(\delta)} y_{k-j}}{a_1 h^{-\beta_1} c_0^{(\beta_1)} + T_d h^{-\delta} c_0^{(\delta)} + (a_0 + K)}, \quad (66)$$

pre $(k = 1, 2, \dots)$, kde $y_0 = 0$. Pre $w(t) = \delta(t)$ platí: $w_0 = 1/h$, $w_1 = 1/h$ a $w_k = 0$, $(k = 2, 3, \dots)$, pre $w(t) = \mu(t)$ platí: $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ a $w_k = 1$, $(k = 2, 3, \dots)$.



(a) Impulzová charakteristika

(b) Prechodová charakteristika

Obr. 27: Charakteristiky regulačného obvodu vypočítané z (66).

Na Obr. 27 sú zobrazené charakteristiky regulačného obvodu (65) s parametrami sústavy (63) a konštantami regulátora (64) pre čas simulácie $t = 5$ [s] a krok $h = 0.01$. Pre uvedený čas simulácie sme získali nasledujúce hodnoty vybraných kritérií akosti: $S_r = 0.3901$, $P_r = 1.015$ a $T_r = 1.08$.

Úloha na samostatné cvičenie:

1. Odvodte výsledný vzťah a simulujte regulačný obvod, ak parametre regulovanej sústavy sú: $a_2 = 0.8$, $a_1 = 0.5$, $a_0 = 1.0$, $\beta_2 = 2.2$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_0 = 0$ a konštanty regulátora sú: $K = 50.15$, $T_i = 392.82$, $T_d = 24.98$, $\delta = \lambda = 0.90$ pre čas $t = 5$ [s]. Posúďte tiež pre zadaný čas nasledujúce vybrané kritériá akosti: S_r , P_r a T_r .

Príloha 1: Slovník Laplaceovej transformácie

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - kT)$	e^{-kTp}
$\mu(t)$	$\frac{1}{p}$
$\mu(t - a)$	$\frac{1}{p} e^{-ap}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$t^n, n \in N^+$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$t^n e^{-\alpha t}, n \in N^+$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega} e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{1}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$	$\frac{1}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
$t e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{(p-\alpha)^2-\omega^2}{[(p-\alpha)^2+\omega^2]^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$

Príloha 2: Slovník diskkrétnej Z-transformácie

$f(t), t \geq 0$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - kT)$	z^{-k}
$\mu(t)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{Tz e^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
$t^2 e^{-\alpha t}$	$\frac{T^2 e^{-\alpha T} z(z+e^{-\alpha T})}{(z-e^{-\alpha T})^3}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{z e^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{z^2 - z e^{-\alpha T} \cos(\omega T)}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{z(1 - e^{-\alpha T})}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})}$
$b e^{-\beta t} - a e^{-\alpha t}$	$\frac{z[z(b-a) - (b e^{-\alpha T} - a e^{-\beta T})]}{(z - e^{-\alpha T})(z - e^{-\beta T})}$

Príloha 3: Eulerove vzťahy

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

$$e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2 \cos(\omega t)$$

$$e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i \sin(\omega t)$$

Literatúra

- [1] J. J. D'Azzo, C.H. Houpis: *Linear control system analysis and design*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
- [2] Ľ. Dorčák: *Základy technickej kybernetiky*, (Učebné texty), Elfa, s.r.o, Košice, 2000.
- [3] Ľ. Dorčák: *Numerical Models for Simulation the Fractional-Order Control Systems*, UEF-04-94, SAV, Košice, 1994.
- [4] R. C. Dorf, R. H. Bishop: *Modern control system*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1998.
- [5] M. Driels: *Linear control system engineering*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1996.
- [6] V. Jančaryová: *Teória riadenia*, Alfa, Bratislava, 1982.
- [7] V. G. Jenson, G. V. Jefferson: *Matematické metódy v chemickom inžinierstve*, Alfa, Bratislava, 1973.
- [8] I. Košťál: *Automatizované systémy riadenia technologických procesov I*, Edičné stredisko VŠT, Košice, 1984.
- [9] Š. Kozák: *Lineárne číslicové systémy I.*, STU, Bratislava, 1995.
- [10] L. Madarász: *Teória automatického riadenia*, (Lineárne a nelineárne sústavy), Alfa, Bratislava, 1990.
- [11] E. Madelung: *Príručka matematiky pre fyzikov*, ALFA, Bratislava, 1975.
- [12] P. Noskievič: *Modelování a identifikace systému*, Montanex a.s., Ostrava, 1999.
- [13] I. Petráš: *Neceločíselné metódy v riadení*, Dizertačná práca, Košice, 1999.
- [14] I. Podlubný: *Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers*, UEF-03-94, SAV, Košice, 1994.
- [15] J. Sarnovský: *Riadenie zložitých systémov*, Alfa, Bratislava, 1992.
- [16] E. Veselý, M. Badida, M. Telepovský: *Teória automatického riadenia II.*, Edičné stredisko TU, Košice, 1992.
- [17] V. Zábavník: *Teória automatického riadenia*, (Návody na cvičenia), Edičné stredisko VŠT, Košice, 1988.
- [18] P. Zítek, A. Víteček: *Návrh řízení podsystému se spožděními a nelinearitami*, ČVUT, Praha, 1999.

Autor: Ing. Ivo Petráš, PhD.
Lektori: Doc. Ing. Ľubomír Dorčák, CSc.
Ing. Ján Terpák, CSc.
Názov: Teória automatického riadenia,
(Návody na cvičenia)
Počet výtlačkov: 60
Počet strán: 52
Formát: A4
Vydala: Elfa, s.r.o., Letná 9, Košice
Vydanie: Prvé

ISBN 80-88964-92-X

ISBN 80-88964-92-X